Filozofia Nauki
Rok III, 1995, Nr 1-2(9-10)

DYSKUSJE

Racjonalność — Falsyfikowalność — Kosmologia

W dniach 11-12 maja 1995 roku odbyło się w Krakowie sympozjum, zorganizowane przez Dra Jacka Urbańca z Instytutu Informatyki UJ i Ks. Prof. Michała Hellera z Ośrodka Badań Interdyscyplinarnych PAT w Krakowie. Publikujemy niżej program sympozjum oraz autoreferaty i teksty części głosów dyskusyjnych, odtworzonych na podstawie zapisu magnetofonowego i przejrzanych przez uczestników dyskusji.

Redakcja

PROGRAM SYMPOZJUM

11 maja 1995 roku

Andrzej Staruszkiewicz, Absolutność prawdy odkrywanej przez fizykę.

Jerzy Kijowski, Trudności ze sformułowaniem opisu świata w mikroskali.

DYSKUSJA: FIZYKA I FILOZOFIA. Prowadzący: **Andrzej Fuliński**. Uczestnicy: **Michał Heller, Elżbieta Kałuszyńska, Jerzy Kijowski, Andrzej Staruszkiewicz.**

Michał Heller, Neopozytywizm i mechanika kwantowa.

Ryszard Wójcicki, Karla Poppera koncepcja prawdy, zawartości prawdziwej i prawdoupodobnienia.

Jacek J. Jadacki, O pojęciu „prostoty".

12 maja 1995 roku

Roman Duda, Rozwój matematyki a zasada falsyfikacjonizmu.

Adam Łomnicki, Czy Darwinowska teoria ewolucji jest falsyfikowalną teorią naukową?

DYSKUSJA: MATEMATYKA I FILOZOFIA. Prowadzący: **Andrzej Pelczar.** Wprowadzenie do dyskusji: **Andrzej Lasota**. Uczestnicy: **Roman Duda, Stanisław Sędziwy, Jacek Urbaniec**

AUTOREFERATY I DYSKUSJE

FAKTY I ICH ROZUMIENIE

ANDRZEJ STARUSZKIEWICZ: *Absolutność prawdy odkrywanej przez fizykę* (autoreferat)

«Falsyfikowalne» są tylko wielkie teorie fizyki matematycznej, takie jak mechanika klasyczna, elektrodynamika Maxwella lub mechanika kwantowa. Natomiast poszczególne fakty naukowe, a także ich jakościowe rozumienie, stanowią prawdy absolutne, które nigdy nie ulegają falsyfikacji. Wielkie teorie fizyki matematycznej są układami r ó w n a ń, a więc wypowiedzi nieskończenie ostrych, które z natury rzeczy są narażone na falsyfikację przy bardzo dokładnym badaniu. Natomiast jakościowe rozumienie zjawisk fizycznych, którego teorie te dostarczają, stanowi nieprzemijającą prawdę absolutną. Na przykład: stabilność atomów jest faktem, który tłumaczy jakościowo zasada nieoznaczoności, będąca częścią mechaniki kwantowej. Tłumaczenie to jest po prostu prawdziwe i nigdy nie będzie sfalsyfikowane. Natomiast r ó w n a n i a opisujące strukturę atomów, takie jak równania Schrödingera lub Diraca, mają istotnie charakter przybliżony i mogą zostać zastąpione w przyszłości przez równania doskonalsze.

JACEK JADACKI:

Profesor Staruszkiewicz chce, aby odgraniczać wyraźnie od siebie zdania faktyczne, prawa fenomenologiczne i zasady wyjaśniające. Wątpię, żeby dało się to zadowalająco przeprowadzić. Czym miałyby się w szczególności różnić prawa od zasad?

ANDRZEJ STARUSZKIEWICZ:

Rozważmy taki przykład. Merkury porusza się wokół Słońca troszeczkę inaczej niż to przewidują prawa Newtona: różnica jest gdzieś na ósmym miejscu po przecinku, ale jest. Astronomowie XIX-wieczni o tym doskonale wiedzieli. Tę niezgodność można próbować wyjaśnić na setki sposobów. Problem polega na tym, że ponieważ obracanie elipsy Keplera nie wymaga energii, każda perturbacja prowadzi do obrotu tej elipsy. Nie zadowala to fizyków, jeśli do wyjaśnienia jednej niewiadomej wprowadza się nowe. To, co zrobił Einstein, to jest wyjaśnienie tej anomalii ruchowej na absolutnie innej zasadzie: na drodze stworzenia pewnej struktury, przy tworzeniu której kierujemy się względami czysto formalnymi.

ELŻBIETA KAŁUSZYŃSKA:

Chciałam spytać o parę rzeczy, żeby upewnić się, czy dobrze zrozumiałam tok wykładu Profesora Staruszkiewicza. Mówił Pan o absolutności prawd dotyczących faktów i jakościowego rozumienia świata. Czyż nie było jednak faktem, że spalanie ciał uwalnia flogiston? Teraz ta «prawda» przestała obowiązywać; taki fakt nie jest obserwowany. Był jednak obserwowany przez całe stulecie, istniało wiele jakościowych, faktualnych praw opisujących przebieg procesów chemicznych, w których uczestniczył flogiston. Wszystkie one odeszły razem z flogistonem, nie były więc prawdziwe w sensie absolutnym. Dalej, znajduje Pan absolutną prawdę w jakościowym sposobie opisywania, rozumienia świata przez fizykę. Tak wyraźnie zdaje się przeczyć temu historia fizyki. Arystotelesowskie rozumienie przyrody, przez dwa tysiąclecia kształtujące wyobrażenia o świecie, tak bardzo różni się np. od Newtonowskiego. Jak bardzo ważyła i na obserwacjach, i na poszukiwanych rozwiązaniach np. zasada *horror vacui*, głosząca, że przyroda boi się próżni. Jeszcze przeciwnicy Torricelliego twierdzili, że to *horror vacui* utrzymuje słupek rtęci w barometrze.

Dalej sugeruje Pan, że postęp w fizyce, zastępowanie jednych teorii przez inne, wymusza rosnąca precyzja pomiarów. Zgadzam się, że rozstrzygająca jest w końcu zgodność z doświadczeniem, ale różnica między, powiedzmy, Newtonowską mechaniką a teorią względności to nie kwestia «dziesiątego miejsca po przecinku» — jak można, mylnie chyba, zinterpretować Pana wypowiedź. Dzieli je przecież tak zasadnicza różnica w sposobie widzenia rzeczywistości, co raz jeszcze podważa słuszność tezy o absolutnym walorze fizykalnej wizji świata.

ANDRZEJ STARUSZKIEWICZ:

Istotnie. Przejście od jednych teorii do drugich — to nie są tylko te «miejsca po przecinku»; to jest bardzo często zmiana jakościowego widzenia świata. Natomiast ta całkowita zmiana widzenia świata bardzo często daje jedynie zmianę owego dziesiątego miejsca po przecinku. Tak jest w przypadku ruchu perihelium Merkurego. Ogólna teoria względności i mechanika Newtona — to są różne światy, które nie mają ze sobą nic wspólnego; a w wyniku dają te same ruchy planet — jeśli tego bardzo dokładnie nie badać.

Co do teorii cieplika i zasady *horror vacui*, to nie będę się na nie wybrzydzał. Są to pewne prowizoryczne zasady, przy pomocy których coś się porządkuje. To coś — jeżeli tylko zostało prawidłowo, tzn. zgodnie z doświadczeniem, uporządkowane — zostaje. Inna sprawa, że w wypadku „cieplika" i „lęku próżni" mamy do czynienia z bardzo niefortunnymi pojęciami. Od czasów Newtona umiemy dość dobrze odróżniać wyjaśnienie rzeczywiste od pozornego.

ANDRZEJ LASOTA:

Czy fizyka zakłada autonomiczność swoich praw?

ANDRZEJ STARUSZKIEWICZ:

Jak wiadomo, Dirac wysunął hipotezę, że pewne podstawowe stałe przyrody — stała Plancka, ładunek elektronów, stała grawitacji — ewoluują w czasie. Jest to jedna z hipotez, która — jak przypuszczam — bardzo by się podobała Popperowi. Bo skoro tak, to bardzo dużo praw fizyki zaczyna zależeć od czasu. Chociaż upierałbym się, że nawet w sytuacji ewolucji podstawowych stałych fizyki w czasie, to, co jest prawdą dzisiaj, pozostaje prawdą zawsze, tyle że trzeba wypisać wtedy wszystkie nierówności, których my w praktyce nie wypisujemy. Skądinąd wszystkie dotychchczasowe badania zaprzeczają hipotezie Diraca. Szybkość ewentualnych zmian stałych można ocenić. Na przykład, według niektórych ocen, stała struktury subtelnej nie zmienia się znacząco w ciągu 10^{14} lat — a to jest okres równy wiekowi Kosmosu. Podobne oszacowania istnieją dla stałej grawitacji; pochodzą one z podwójnego pulsara. Świadczą one o tym, że stała grawitacji musiałaby się zmieniać w sposób absurdalnie wolny.

JACEK URBANIEC:

Gdy na gruncie fizyki pojawia się nieskończoność, np. w założeniu, że czasoprzestrzeń jest ciągła, trudno wtedy mówić o fenomenologicznym charakterze takich teorii ...

ANDRZEJ STARUSZKIEWICZ:

Hipoteza zakładająca, że geometria oparta na pewnym *continuum* jest geometrią naszej czasoprzestrzeni, nie jest żadnym uproszczeniem. Tak by było, gdybyśmy widzieli, że nasza czasoprzestrzeń nie jest *continuum*, ale dla przybliżenia za taką ją brali. Elementów strukturalnych czasoprzestrzeni jednak nie widzimy. Podejrzewamy, że są one są rzędu 10^{-33} cm; ale jako takie — są poza zasięgiem wszelkich możliwych doświadczeń. Ze świadomym przybliżeniem mamy do czynienia wówczas, gdy wiemy o czymś — i zapominamy o tym. Wiemy np. że powietrze to nie jest ośrodek ciągły, tylko zbiór molekuł, ale wygodniej jest nam o tym zapomnieć — to jest teoria fenomenologiczna. Natomiast w szczególnej i ogólnej teorii względności niczego nie pomijamy z tego, co już wiemy.

ANDRZEJ PELCZAR:

Kiedy mówi się tu o teoriach — to chodzi w istocie o modele matematyczne. W wypadku teorii fenomenologicznej — przybliżenia robimy w jej obrębie. To, czy model matematyczny jest poprawny, zależy od tego, czy spełnia pewne kryteria formalne. W ramach jednak modelu matematycznego postępujemy już całkiem formalnie! Czy taki model odpowiada fizycznej rzeczywistości, jest inną sprawą. Kiedy przed Keplerem przyjmowano, że planety poruszają się po okręgach, a Kepler uznał, że poruszają się po elipsach, to jego teoria była po prostu lepszym modelem. Nie znaczy to jednak, że w teorii, zakładającej ruch planet po okręgach, coś było nie w porządku; ona była tylko gorszym przybliżeniem: gorzej przystawała do rzeczywistości.

RYSZARD WÓJCICKI:

Czy — poza teoriami fizycznymi — za teorię nie można uznać także np. biologicznej teorii ewolucji?

ANDRZEJ STARUSZKIEWICZ:

Zgadzam się całkowicie. Teoria ewolucji jest jedyną rzeczą poza fizyką, która zasługuje na nazwę teorii. Nie powiedziałem tego, bo jako fizyk mam wbite do głowy, że teoria to jest zbiór równań.

FIZYKA I FILOZOFIA

ANDRZEJ FULIŃSKI: Co fizyka i filozofia dają? Po pierwsze, wyniki fizyki i filozofii bywają wcielane w życie. Realizacja pewnych koncepcji filozoficznych przyniosła dużo złego, co przeżyliśmy na własnej skórze. Każdy wie, jak wiele złego wiąże się z realizacją niektórych rezultatów fizyki. Nie umiałbym ocenić, które z tych skutków były gorsze.

Co fizyka i filozofia dają dobrego? Fizyka na pewno różne dobre rzeczy daje: światło na tej sali, błysk flesza przed chwilą itd., itd. Co dobrego dała filozofia, to wolę pozostawić do oceny filozofom.

Co fizyka i filozofia dają sobie wzajemnie?

Najpierw, co daje fizyka filozofii? Teoretycznie powinna dawać dużo; przynajmniej wielu fizyków sądzi, że fizyka — zwłaszcza teoretyczna, uprawiana na dostatecznie głębokim poziomie — to jest już właściwie filozofia. W praktyce obawiam się, że daje niewiele, ponieważ typową odpowiedzią filozofa na wywody fizyka jest w nalepszym wypadku: „Tak, ale ..."; a w gorszym wypadku: „Znowu fizyk się wymądrza".

Co bezpośrednio daje filozofia fizyce? Filozofowie sądzą, że na pewno dużo. Fizycy z praktyki wiedzą, że — nic. O przykładach przejmowania koncepcji filozoficznych do nauki — takich np., jak metody Łysenki — lepiej nie mówić. Mówiąc bardziej serio, filozofia pewne rzeczy daje, ale nie tyle fizyce, ile fizykowi, m.in. dlatego, że poszerza wyobraźnię. Ale tak samo jak filozofia działa w ogóle cała kultura: także poezja, muzyka, fantastyka. Mówiąc złośliwie, wielu fizyków bezpośrednio więcej skorzystało z literatury fantastyczno-naukowej niż z filozofii.

Tyle prowokacji wstępnych.

ELŻBIETA KAŁUSZYŃSKA:

Temat zaproponowany do dyskusji jest tak trudny i obszerny, że nie może być potraktowany zupełnie serio.

«Prowokacja» Profesora Fulińskiego przypomniała mi pewien odczyt, który miał miejsce przeszło ćwierć wieku temu. Referent — miłosiernie nie wspomnę nazwiska — dowodził, że cała współczesna (wtedy) fizyka czerpie inspiracje z dzieł ... Lenina. Może więc tylko fizycy w zadufaniu nie dostrzegają tych zapożyczeń? Mówiąc bardziej serio, wydaje się, że fizycy szukają jednak czasem jakiejś pomocy w filozofii. Inna rzecz, że często wzdychają zawiedzeni: *Ah, those philosophers*, jak Bohr po spotkaniu z przedstawicielami Koła Wiedeńskiego, którzy przyjęli jego prezentację mechaniki kwantowej z pełną aprobatą, co — zdaniem Bohra — świadczyło o tym, że *de facto* nic nie zrozumieli.

Z czego taki stan rzeczy może wynikać? Przyczyny zapewne mogą być różne. Chcę tu zwrócić uwagę na jedną tylko okoliczność.

Filozofowie nauki, jak wszyscy zajmujący się teoretyczną działalnością, budują modele tego, co badają. Poza wczesnym okresem neopozytywizmu, filozofia nauki nie chce być dyscypliną normatywną, tylko opisową; toteż chce, żeby teorie fizyczne (filozofowie nauki najchętniej «żerują» na fizyce) pasowały do tych modeli. Każdy model zawiera jednak nie tylko (konieczne) idealizacje, ale kryje również pewne oceny i założenia natury filozoficznej. Filozofowie chcieliby widzieć np. teorie fizyczne jako eleganckie formalne systemy aksjomatyczne, piękniejsze nawet niż teorie matematyczne. Albo przeciwnie, budują model, w którym teoria wynurza się indukcyjnie z empirii, jak Wenus z morskiej piany. Te — często jednostronne — ujęcia, uproszczenia, rodzą wiele problemów, z którymi borykają się filozofowie nauki. Ale fizycy nie rozpoznają nieraz w tych modelach własnych teorii; problemy filozofów nauki nie są tymi, które (czasami) ich nurtują. Nie musi to znaczyć, choć niestety może, że problemy filozofów nauki są «wydumane» czy nieistotne. Może tu być tak, jak z pretensjami Nancy Cartwright, która ma za złe teoriom naukowym, że nie opisują kamelii w jej ogrodzie: mówią wprawdzie o wpływie kwaśności gleby, wilgotności czy temperatury na wegetację kamelii, ale wszystkie te czynniki traktowane są odrębnie i Pani Cartwright, próbując zastosować je do interesującego ją przypadku, znajduje sprzeczne nieraz wskazówki. Twierdzi więc, że teorie kłamią. Myślę, że niesłusznie. Podobnie oczekiwania, punkty widzenia i oceny filozofów i fizyków mogą się różnić, a nieświadomość tego stanu rzeczy prowadzić do nieuzasadnionych pretensji.

Oceny teorii fizycznych dokonywane przez samych fizyków różnią się zresztą nie tylko od ocen filozofów, ale i użytkowników tych teorii. Profesor Kijowski mówił dzisiaj o dwóch teoriach: teorii względności i mechanice kwantowej. Teoria względności doczekała się wielu komplementów, zaś mechanika kwantowa — wielu przygan. Dlaczego teoria względności jest dobra? Bo jest po prostu piękna. Mechanika kwantowa zaś zrobiła się paskudna; jeszcze elektrodynamika kwantowa była ładna, ale jest coraz gorzej; brzydnie coraz bardziej. To estetyczne kryterium, które występuje często w ocenach dokonywanych przez «filozofujących» fizyków: Einsteina, Heisenberga, Weinberga, Hawkinga i innych, niewiele ma chyba wspólnego z matematyczną elegancją teorii. Weinberg we *Śnie o teorii ostatecznej* pisze o narzucającej się konieczności pewnych sformułowań, o czymś w rodzaju właściwego domknięcia, dopełnienia — i to właśnie jest piękne.

Swoiste piękno pewnych teorii fizyki jest trudne do uchwycenia przez filozofów; myślę też, że rozmija się z ocenami użytkowników teorii fizycznych. Wydaje się, że teoria względności, która dopiero teraz, po kilkudziesięciu latach zyskuje potwierdzenia empiryczne, chociaż taka «śliczna», może jeszcze zawieść; może się okazać, że nie przystaje dobrze do rzeczywistości. Natomiast tej «paskudnej» mechaniki kwantowej już chyba z nauki wyrugować się nie da, bo by się na to nie zgodzili np. chemicy, tak jak technicy nie pozwalają wyrzucić «fałszywej» mechaniki Newtona, która ciągle świetnie im służy i przy budowie mostów, i nawet przy wysyłaniu rakiet na Księżyc. Mechanika Newtona jest paradygmatycznym przykładem «teorii zamkniętej» w sensie Heisenberga i wydaje się, że mechanika kwantowa także osiągnęła już ten status.

Nawiązując do referatu profesora Staruszkiewicza o prawdach absolutnych w fizyce, warto przypomnieć, że «zamkniętą» nazywał Heisenberg teorię wtedy, gdy jej wewnątrzteoretyczne cele zostały wyczerpane, a nadto został wyraźnie określony zakres jej stosowalności, dzięki czemu staje się ona absolutnie prawdziwa ... w ramach swego zasięgu, prawdziwa po wsze czasy — jak to ujmował Heisenberg. Tego typu absolutna prawdziwość jest jednak prawdziwością definicji; jeśli spotykamy zjawisko, które nie przebiega zgodnie z mechaniką Newtona, to nie sądzimy, że obala ono tę teorię — mechanika Newtona jako teoria u n i w e r s a l n a została przecież dawno obalona — tylko stwierdzamy, że nie jest to «klasyczny przypadek»; nie należy on do zakresu jej stosowalności.

Wróćmy jednak do tematu naszej dyskusji. Pora na konkluzję. Chciałam zwrócić uwagę Państwa na różne sposoby oceniania teorii fizycznych jako na jedno ze źródeł możliwych nieporozumień i nieuzasadnionych wzajemnych pretensji. Myślę, że takie spotkanie jak dzisiejsze może przyczynić się, choćby w niewielkim stopniu, do wzajemnego zrozumienia.

ANDRZEJ STARUSZKIEWICZ:

Ja zacząłbym od historii. Pewne związki fizyki i filozofii są faktem historycznym. Przypomnijmy. Kartezjusz i Leibniz są uważani za filozofów, ale zarazem wnieśli ogromy wkład do rozwoju fizyki. Z kolei Newton jest uważany za fizyka, ale to przecież on ukształtował całą filozofię XVIII wieku. Kant — można powiedzieć — to jest dywagacja na marginesie mechaniki Newtona.

Jak fizycy oceniają te związki, a w szczególności, jak fizycy oceniają dokonania filozofów?

W moich oczach filozofowie są ludźmi, którzy przymierzają się do rozwiązania zbyt trudnych problemów. Chciałbym tu nawiązać do Poppera, który wielokrotnie i z wielkim naciskiem podkreślał, że nie warto porywać się na zbyt trudne zadania. Próba stworzenia społeczeństwa doskonałego jest zawsze skazana na niepowodzenie, natomiast próba pewnego ulepszenia tego, co jest, może się powieść; to jest zasadnicza myśl Poppera, jeśli chodzi o społeczeństwo. Myślę, że to samo dotyczy nauki.

Angielski biolog, laureat nagrody Nobla w dziedzinie medycyny, a zarazem filozof nauki, sir Peter Medawar, powiedział, że nauka jest to sztuka robienia tego, co jest możliwe do zrobienia. To jest bardzo trafna uwaga. Jeżeli jakiś problem jest nie do «ugryzienia», nie do rozwiązania chwilowo, to wysiłek, który by ktoś poświęcił na jego rozwiązanie, byłby wysiłkiem straconym. Mam wrażenie, że w filozofii wiele wysiłku ma taki właśnie charakter: wysiłku poświęconego problemom, o których wiadomo, że nie dadzą się rozwiązać.

W fizyce też, oczywiście, bardzo często ludzie przykładają się do problemów zbyt trudnych. Jest tak dlatego, że w obliczu czegoś nieznanego nie możemy powiedzieć z góry, czy to coś jest proste, czy — nie. I wtedy fizycy, próbując rozwiązać taki zbyt trudny problem, popadają w sposób mówienia i działania, który jest prawie nieodróżnialny od tego, który jest udziałem filozofów.

Przykładem jest np. problem interpretacji mechaniki kwantowej. Istnieje na ten temat gigantyczna literatura, działają towarzystwa wzajemnej adoracji, które się tym zajmują, zwoływane są kongresy naukowe. W moim przekonaniu wynik całej tej działalności jest zerowy. Dlaczego? Właśnie dlatego, że tutaj «siła» jest przyłożona do zbyt wielkiego «ciężaru», a więc nie może go poruszyć. Bardzo często fizycy, którzy — wydawałoby się — powinni być poddani dyscyplinie: odróżniać to, co jest publikowalne, od tego, co nie jest publikowalne, to, co jest odkryciem, od tego, co nie jest odkryciem, wypowiadając się w tej dziedzinie, zapominają o tych wszystkich «moralnych» przykazaniach fizyki i publikują rzeczy, które — moim zdaniem — są bełkotem, zupełnie niczego nie oznaczają, w szczególności nie posuwają naprzód rzeczywistego zrozumienie sprawy interpretacji mechaniki kwantowej.

Jedynym sprawiedliwym, który posunął rzeczywiście naprzód interpretację mechaniki kwantowej, jest Bell. Jego nierówności są co prawda tylko twierdzeniem w ramach mechaniki kwantowej, ale są one tak sformułowane, że można je sprawdzać eksperymentalnie i dzięki temu «widzieć» na własne oczy, że rzeczywistość jest taka, paradoksalnie, jak mówi mechanika kwantowa.

W tej sytuacji nie powinniśmy może zbyt surowo oceniać filozofów, że to, co piszą, to jest często bełkot, skoro — niestety — sami fizycy uprawiają często podobny bełkot.

JERZY KIJOWSKI:

Zaliczam się do wymierającego już gatunku tych, co bardzo mocno odczuwają jedność nauki.

Dla mnie fizyka jest — w jakimś sensie — częścią filozofii. Oczywiście, z powodu rozrostu technik badawczych i konieczności specjalizacji, w praktyce mamy różne fakultety, siedzimy w różnych budynkach, ale gdyby doszło do podziału nauki na dyscypliny szczegółowe i zaniku komunikacji między nimi, to byłaby to katastrofa.

Jestem dość daleko od pogranicza fizyki i filozofii, ale żyję w pobliżu innego, ważnego moim zdaniem, pogranicza: matematyki i fizyki. Tutaj też występują «konflikty pogranicza», granica coraz bardziej zarasta, coraz jest mniej przekraczana i to także uważam za coś bardzo szkodliwego, ponieważ matematyka jest też — niewątpliwie — częścią filozofii: tworzy język, bez którego nie bylibyśmy w ogóle w stanie myśleć o świecie.

Nie wydaje mi się, aby wszystko, co zostało z grubsza zweryfikowane, automatycznie wchodziło do kanonu nauki. Wydaje mi się, że ciągle się jeszcze może okazać, że przez jakiś niezwykły zbieg okoliczności teorie, które są już całkiem nieźle potwierdzone, okażą się błędnym tropem, ślepą uliczką. Na przykład, czy teoria Ptolemeusza, która bardzo dobrze opisywała ruch planet po niebie, była prawdziwa, czy — nie? Była ona bardzo dobrze zweryfikowana — do tego stopnia, że gdy zastąpiła ją wizja Kopernika, to ta ostatnia dużo gorzej pasowała do tych ruchów. Trzeba było dopiero kilkuset lat, żeby to, co wyrosło na gruncie teorii Kopernika, przekształciło się w ostateczny — dużo lepszy — obraz Newtonowski. Na początku było to znaczne pogorszenie: wyniki były dużo gorsze.

Nie zgadzam się z taką interpretacją, że mniej więcej do Newtona nauka była słaba i ludzie myśleli mało precyzyjnie. Społeczeństwo było może mniej wykształcone — trochę może w wizji «ciemnego» Średniowiecza jest prawdy — uczeni może byli nieliczni, ale rozumowali równie precyzyjnie, jak my dzisiaj: ludzie światli byli *naprawdę* światli.

Mechanika kwantowa stanowi rzeczywiście fundamentalne narzędzie pojęciowe chemika, jest bardzo dobrze potwierdzana przez wiele faktów naukowych. Mimo to nie jest wcale pewne, czy nie okaże się, że jest to przypadkowy zbieg okoliczności. Albowiem wiele faktów dotyczących atomu wodoru związanych jest z pewną symetrią problemu: działa tu pewna grupa symetrii. Mogłoby się okazać, że zupełnie inna teoria, która dysponuje zupełnie innym aparatem pojęciowym — tylko dlatego, że zajmuje się problemem atomu wodoru, w którym jest taka a nie inna symetria — wyprodukuje dokładnie ten sam wzór na spektrum tego atomu i raptem okaże się, że byliśmy w ślepej uliczce.

Podkreślam: nie byłbym tak pewien, czy wszystko, co jest w tej chwili prawdziwe w aparacie pojęciowym, przy pomocy którego myślimy o mikroświecie, nie okaże się w przyszłości fałszywe. Nie chcę się już zajmować drugim krańcem względem mikroświata, czyli wszechświatem i opisującą go kosmologią, ale tam także jest wiele zagadek i co roku dowiadujemy się zupełnie innych rzeczy na temat globalnej budowy wszechświata.

ANDRZEJ STARUSZKIEWICZ:

Nie widzę istotnej różnicy między swoim stanowiskiem i stanowiskiem Profesora Kijowskiego.

Odróżniam fakty i ich jakościowe rozumienie od teorii. Fakty poprawnie ustalone stanowią prawdę absolutną; ich jakościowe rozumienie, jeśli jest rzeczywiste, stanowi prawdę absolutną; natomiast teorie oczywiście będą się zmieniać jeszcze długo. A wraz z teoriami zmienia się cały aparat pojęciowy: np. aparat pojęciowy ogólnej teorii względności jest zupełnie innym światem w stosunku do mechaniki Newtona, a fakty są prawie te same.

Jeśli chodzi o Ptolemeusza, to można powiedzieć, że w połowie XVI wieku pewne fakty były poprawnie ustalone; teoria Ptolemeusza po to wprowadza epicykle, bo ruch planet nie jest ruchem jednostajnym po okręgu — czasami planety się cofają, więc żeby to opisać, wprowadza się epicykle. Gorzej jest z jakościowym rozumieniem tych faktów. Teoria Newtona daje jakościowe rozumienie mechanizmu działania układu planetarnego, a «teoria» Ptolemeusza — nie daje: jest to tylko schemat kinematyczny, który niczego nie wyjaśnia. Powtórzmy: fakty są te same, jakościowe rozumienie daje dopiero teoria Newtona. Dla mnie teoria zasługująca na nazwę „teorii" musi dawać także jakościowe zrozumienie.

MICHAŁ HELLER:

Jesteśmy tu świadkami pewnego rodzaju konfliktu między filozofami i fizykami. Ja mam ambicję być i filozofem, i fizykiem; stąd ten konflikt w moim wypadku musiałby przybrać postać schizofrenii.

Pytam więc, co moja lewa półkula mózgowa daje prawej, a konkretnie: co daje fizyka filozofii? Daje pewne wartości poznawcze. Stwierdzając to, wchodzę w dziedzinę aksjologii. Nawiasem mówiąc, aksjologia nauki dość szybko się obecnie rozwija.

Najpierw krótko o roli metafizyki w kulturze zachodniej. Twierdzono, jak wiadomo, że metafizyka jest bezsensowna; ale nie można uznać, że metafizyka nie spełniała żadnej roli w naszej kulturze. Rola metafizyki była przede wszystkim rolą organizującą — czy regulującą — względem innych nauk. Metafizyka określała m.in., jakie pytania warto stawiać, a także kształtowała język i granice jego stosowalności. Dawała też fundamentalną wiedzę o rzeczywistości — a w każdym razie pretendującą do tego, by być fundamentalną wiedzą o rzeczywistości.

Od XVIII wieku z tych funkcji zaczyna metafizykę wypierać — fizyka. Niekiedy to wypieranie przybierało postać patologiczną — np. w skrajnych formach pozytywizmu, gdzie temu procesowi towarzyszyły deklaracje, totalnie negujące sensowność funkcji metafizyki. Nie zmienia to faktu, że właśnie fizyka stawała się coraz bardziej nauką regulującą — być może nawet podstawową — dla innych nauk. W programach fizykalizmu mówiło się wręcz, że fizyka jest modelem dla pozostałych nauk. Dzisiaj stoi się raczej na stanowisku, że wszystkie nauki są autonomiczne, co jednak wcale nie przeszkadza temu, że inne nauki z zazdrością patrzą na teorie fizyczne, bo chciałyby dorobić się podobnego poziomu metodologicznej autorefleksji.

Spośród współczesnych metafizyk, jedne wprost nawiązują do fizyki, jak np. metafizyka Whiteheada; inne ją ignorują. Te ostatnie narażają się na to, że staną się po prostu fikcjami. Wypieranie metafizyki — w jej rozmaitych rolach — przez fizykę jest procesem metodologicznie niezmiernie złożonym. Łatwo tu wpaść w pułapkę jakiegoś neoneopozytywizmu. Potrzebna jest więc głęboka analiza metodologiczna tego procesu — a do takiej nie jesteśmy jeszcze gotowi: to jest dopiero rzecz do zrobienia.

Tak więc, fizyka staje się w jakimś sensie trochę metafizyką i jest to proces, który wymaga bardzo dojrzałej refleksji metodologicznej. Fizyka może dać filozofii bardzo wiele, ale filozofia musi to poprawnie brać, czyli innymi słowy: musi opracować metodologię tego procesu. W przeciwnym razie będzie nam grozić filozoficzny anarchizm.

JERZY KIJOWSKI:

Uważam za skandal, że maturzysta może — praktycznie rzecz biorąc — nic nie wiedzieć o filozofii. Trzeba uczyć filozofii naszą młodzież maturalną.

Chciałbym też poprosić o wyrozumiałość dla maniaków. Profesor Staruszkiewicz wspomniał o tych, którzy zajmowali się tzw. logiką kwantową, a więc próbą zrozumienia mechaniki kwantowej. Byli wśród nich oczywiście maniacy. Van Kampen, bardzo wybitny fizyk, mówił: należy zamknąć oczy, nie myśleć, wykonać rachunki, o których mówi mechanika kwantowa, i wszystko się zgodzi. Ale ja np. nie mogę żyć ze świadomością, że ta sama mechanika kwantowa prowadzi jednak do paradoksów, które Einstein sukcesywnie wymyślał przez wiele lat. Te wszystkie koty Schrödingera, te wszystkie paradoksy Einsteina-Rosena-Podolskiego mnie osobiście nie dają spać. Dlatego mam szacunek intelektualny dla ludzi, którzy podjęli próbę logiki kwantowej, mimo że *a posteriori* zgadzam się z oceną, że wyniki są zerowe: kilkadziesiąt lat pracy tych ludzi poszło na marne. Ale może taki jest nasz los — ludzi zajmujących się fizyką — że *a priori* nie wiadomo, czy nie stanowimy po prostu «nawozu» dla przyszłego drzewa, które wyrośnie i wyda wspaniałe owoce.

Wspomnę o jednej jeszcze aktywności, do której mam ogromy szacunek, i która też zakończyła się klęską. Mam na myśli tzw. konstruktywną teorię pola. Wyrosła ona z niezwykle szlachetnej i w pełni uzasadnionej próby zbudowania mostu między warstwą pojęciową, «filozoficzną» kwantowej teorii pola — a uproszczonymi rachunkami, z których coś tam wynika. W przedsięwzięcie to zaangażowało się w latach siedemdziesiątych i osiemdziesiątych wielu najwybitnieszych przedstawicieli nauk ścisłych — w tym także Polaków; m.in. wielki polski matematyk, Tadeusz Bałaban, pracujący obecnie w Ameryce, opublikował parę lat temu 200-stronicowy abstrakt swojej mniej więcej 1,5 tysiąca stron liczącej pracy, w której dowodzi, że jakiś bardzo uproszczony model kwantowej teorii pola podobno jest sensowny. Wobec takich wyników ręce opadają.

MICHAŁ HELLER:

Krótki komentarz do wypowiedzi Profesora Wójcickiego, który zauważył, że dzisiaj nie mamy żadnej teorii nauki — dysponujemy najwyżej jakimiś pre-teoriami. Podzielam tę opinię. Korzystając z analogii z fizyką, powiedziałbym, że mamy tylko kinematyczne opisy tego, co to jest nauka — bez żadnej dynamicznej teorii. Są więc opisy Kuhnowskie, Popperowskie i inne, ale są to tylko opisy. Teoria zaczyna się wtedy, gdy znamy dynamikę: gdy potrafimy zidentyfikować działające siły; gdy wiemy, jak one działają; gdy jesteśmy w stanie chociażby probabilistycznie, przewidzieć kierunek ewolucji.

Nie jest wykluczone, że rolę tego rodzaju dynamicznej teorii nauki odegra sama fizyka. Nauka jest procesem tworzenia informacji, a fizyka potrafi już opisywać procesy, w których powstają informacje. Służą do tego: teoria układów dynamicznych, równania nieliniowe, termodynamika nieliniowa. Za pomocą tych metod buduje się modele powstawania struktur. Być może dla nauki trzeba będzie stworzyć taki model nieliniowy. Ponieważ rozwój nauki jest bardzo skomplikowanym procesem, będzie to z pewnością tylko model przybliżony. Ale, jak wiadomo, podobne modele stosuje się do badania różnych zjawisk ekonomicznych i społecznych. Jest to duże pole do współdziałania filozofów z ludźmi, którzy znają się na nieliniowych procesach powstawania struktur i potrafią budować odpowiednie modele.

ANDRZEJ FULIŃSKI:

Profesor Kałuszyńska słusznie podkreśliła, że jednymi z głównych kryteriów oceny teorii są kryteria estetyczne. Nawiasem mówiąc, broniłbym tu mechaniki kwantowej, przynajmniej nierelatywistycznej: dla mnie jest to bardzo elegancka («ładna») teoria; daje złącze Josephsona (makroskopowy obiekt kwantowy!), odrodzenia kwantowe, teorię wiązań chemicznych *etc.*

Ale kryteria estetyczne są historycznie zmienne. Popatrzmy, jak wyglądał ideał kobiecy w Grecji klasycznej, w średniowieczu i dziś (pamiętajmy: mówię o tej samej kulturze; pomijam ideał w innych kulturach, powiedzmy — u Hotentotów). Nasze oceny teorii fizycznych, nasze oceny tego, co jest — powiedzmy — elegancką matematyką, również są historycznie zmienne.

Na zakończenie chciałby przypomnieć stworzoną przez Profesora Staruszkiewicza metaforę lustra. Fizyka jest zwierciadłem odbijającym świat. Około stu lat temu to było zwierciadło może nienajdoskonalsze, trochę mętne, obraz świata nie był najwyraźniejszy. Ale było to jedno zwierciadło i jeden obraz. Dzisiaj obraz świata, dostarczany przez fizykę jest znacznie dokładniejszy i ostrzejszy, ale zwierciadło się rozprysło na wiele kawałków, których do siebie nie umiemy dopasować.

Tę metaforę można rozszerzyć, w szczególności na filozofię i fizykę, a właściwie na całą kulturę: niestety mamy ciągle rozbite zwierciadło. Dobrze by było, gdyby udało się nie tyle scalić to zwierciadło, ile stworzyć jedno — nowe.

POZYTYWISTYCZNA KONCEPCJA TEORII

MICHAŁ HELLER: *Neopozytywizm i mechanika kwantowa* (autoreferat)

Tzw. kopenhaska interpretacja mechaniki kwantowej zakłada pewną filozofię. Filozofię tę można wyrazić w postaci dwu następujących stwierdzeń.

(1) Cała dostępna nam wiedza empiryczna o świecie kwantowym daje się wyrazić przy pomocy obserwabli, tj. tych wielkości, które można mierzyć, a wyniki pomiarów wyrażać w postaci liczb rzeczywistych.

(2) Cała fizyczna treść mechaniki kwantowej wyczerpuje się w związkach formalnych łączących matematyczną strukturę mechaniki kwantowej z obserwablami.

Pokrewieństwo tych stwierdzeń z ideologią pozytywizmu jest widoczne. Rodzi się pytanie: dlaczego ideologia neopozytywistyczna została odrzucona przez współczesną filozofię nauki, podczas gdy w różnego rodzaju interpretacjach mechaniki kwantowej do dziś utrzymuje się stwierdzenia (1) i (2)?

Jak wiadomo, struktura mechaniki kwantowej jest modelowana za pomocą teorii przestrzeni Hilberta. Przestrzeń Hilberta interpretuje się jako przestrzeń fazową rozważanego układu kwantowego. Wektory w przestrzeni Hilberta reprezentują stany obiektu kwantowego (w danym momencie czasu). Przestrzeń Hilberta H przedstawia zbiór wszystkich możliwych stanów, w jakich może znajdować się rozważany układ kwantowy, a zbiór B(H) wszystkich ograniczonych operatorów liniowych na H przedstawia zbiór wszystkich możliwych wielkości mierzalnych danego układu kwantowego. Zgodnie z ideologią pozytywistyczną, przestrzeń H jest teoretycznym rusztowaniem, które trzeba odrzucić po zbudowaniu mechaniki kwantowej, natomiast cała treść fizyczna tej teorii mieści się w zbiorze B(H), zinterpretowanym jako zbiór wszystkich możliwych wielkości mierzalnych rozważanego układu kwantowego. Aby więc zrealizować «pozytywistyczno-kopenhaski program», należałoby ograniczyć analizy do zbioru B(H), traktując przestrzeń H co najwyżej jako konstrukcję pomocniczą. Otóż okazuje się, że jest to możliwe. Mechanikę kwantową można bowiem zbudować nie przy pomocy teorii przestrzeni Hilberta, lecz przy pomocy teorii C-algebr (tj. algebr C z gwiazdką). Zgodnie z tym ujęciem elementy C*-algebry A interpretuje się jako obserwable rozważanego układu kwantowego, natomiast stany tego układu są teraz wielkościami zdefiniowanymi na C*-algebrze A, a mianowicie dodatnimi funkcjonałami liniowymi na A (spełniającymi dodatkowy postulat unormowania). Związek między teorią C*-algebr i teorią przestrzeni Hilberta wyraża twierdzenie Gelfanda-Najmarka-Segala (GNS). Mówi ono, że jeżeli został przygotowany obiekt kwantowy w pewnym stanie, rozumianym jako dodatni liniowy funkcjonał na C*-algebrze A, to można zdefiniować reprezentację tej C*-algebry na pewnej przestrzeni Hilberta H, w następstwie czego cały potężny aparat teorii przestrzeni Hilberta zostaje odzyskany. A zatem istotnie, mechanikę kwantową daje się uprawiać, w zasadzie jako tylko teorię wielkości mierzalnych, czyli elementów pewnej C*-algebry. Ale można to czynić nie dlatego, że słuszna jest ideologia neopozytywistyczna, lecz dlatego, że obowiązuje twierdzenie GNS. W przypadku innych teorii fizycznych, których matematyczny formalizm nie może wykazać się posiadaniem odpowiednika twierdzenia GNS, neopozytywistyczna doktryna o redukowalności teorii do języka obserwacyjnego zawodzi.*

Oczywiście, sam czysto formalny fakt istnienia twierdzenia GNS nie wystarczyłby do tego, by można było uprawiać mechanikę kwantową «w terminach obserwabli». Musi być spełniony jeszcze i drugi warunek, a mianowicie w mechanice kwantowej musi istnieć wystarczająco wiele wielkości, które rzeczywiście daje się mierzyć. Istotnie, jest ich tak wiele, że w praktyce daje się wykorzystywać algebraiczne własności teoretycz-

nego zbioru obserwabli. Sądzę, że właśnie te dwa warunki (słuszność twierdzenia GNS i odpowiednia liczba obserwabli) zapewniły sukces pozytywistycznej interpretacji mechaniki kwantowej, a nie wewnętrzna słuszność tej filozofii. W teoriach fizycznych, dla których te dwa warunki nie są spełnione, pozytywizujący program nie tylko nigdy nie został zrealizowany, ale jego wymuszenie na fizyce nie wydaje się w ogóle możliwe.

GŁOS Z SALI

Czy są dostateczne powody, aby pozytywistyczną koncepcję teorii odrzucić jako po prostu fałszywą?

MICHAŁ HELLER:

Byłbym bardzo kiepskim filozofem, gdybym przesądzał z góry, że pozytywistyczna teoria teorii jest fałszywa. Ja ją po prostu testuję: patrzę, jak się przedstawia w konfrontacji z rzeczywistymi problemami fizycznymi. I stwierdzam, że w jednym wypadku została ona potwierdzona: w wypadku mechaniki kwantowej. Ale program pozytywistyczny był opatrzony «dużym kwantyfikatorem»: dotyczył wszystkich możliwych teorii. Zgodnie z tym programem, wszystko, co nie da się sprowadzić do obserwabli, jest po prostu bezsensowne. Praktyka fizyków — w obrębie chociażby tych dwóch teorii: mechaniki klasycznej i kwantowej teorii grawitacji — ten program falsyfikuje.

GŁOS Z SALI

Co fizycy rozumieją przez obserwable?

MICHAŁ HELLER:

To, co fizyk nazywa „obserwablą", jest w gruncie rzeczy dosyć zaawansowaną strukturą teoretyczną, a mianowicie operatorem na przestrzeni Hilberta. Są takie operatory, którym odpowiadają operacje, jakie fizycy w laboratoriach naprawdę wykonują: pomiar pędu, położenia, spinu. Ale tych obserwabli, które rzeczywiście się mierzy, jest skończona liczba i to nie bardzo wielka. Natomiast obserwabli w sensie matematycznym, operatorów na przestrzeni Hilberta, jest nieskończenie wiele — i nie każdej z nich można przyporządkować pomiar w istocie dający się wykonać.

PROSTOTA W NAUCE

JACEK JADACKI: *O pojęciu „prostoty"* (autoreferat)

Proponuję następująco zdefiniować „prostotę", „złożoność" i „bycie prostszym od": (1) x jest PROSTY pod względem V, gdy x nie ma części rodzaju V; (2) x jest ZŁOŻONY pod względem V, gdy x ma części rodzaju V. Zakładam, że każdy przedmiot prosty jest prostszy od przedmiotu złożonego pod danym względem. Przy takim założeniu: (3) jeżeli x i y są złożone, to: x jest PROSTSZY pod względem V [n razy] OD y, gdy x ma [n razy] mniej niż y części rodzaju V (prostych).

Przedmioty proste/złożone ze względu na wielość składników nazywam „prostymi/złożonymi partytywnie", a ze względu na wielość własności — „prostymi/złożonymi atrybutywnie". Odpowiednio mówię o prostocie/złożoności syntetycznej lub analitycznej. Dla odróżnienia od prostoty/złożoności wyodrębnionych wyżej odmian prostotę/złożoność scharakteryzowaną w (1)-(3) nazywam „prostotą/złożonością globalną".

Oczywiście prostota/złożoność globalna może przysługiwać różnym przedmiotom: nie tylko rzeczom, lecz także np. własnościom i stosunkom. Zarówno własności przecież, jak i stosunki, miewają także składniki i własności.

Wydaje mi się, że dla różnych względów nie można znaleźć równej miary/wagi złożoności — intuicje bowiem w tych wypadkach na ogół zawodzą. Można natomiast dać: (4) x jest prostszy w ogóle od y, gdy x jest prostszy pod każdym względem od y.

Pytanie o prostotę/złożoność wolno powtórzyć w odniesieniu do: (a) poszczególnych części danego przedmiotu — zarówno partytywnych, jak i atrybutywnych, w tym m.in. kształtu; (b) budowy tego przedmiotu — pod względem układu (sieci powiązań między częściami) i składu (tworzywa tych części).

We wszystkich tych wypadkach odpowiednie pojęcia dadzą się łatwo sprowadzić do zdefiniowanego już pojęcia „prostoty". Za pomocą definicji (1)-(4) można też zinterpretować wszystkie (znane mi) konteksty, w których występuje pojęcie „prostoty". Dotyczy to w szczególności dwóch istotnych filozoficznych «wymiarów» prostoty: ontologicznego i semiotycznego.

Zagadnienie prostoty/złożoności świata — a więc prostoty/złożoności ontycznej — pojawia się m.in. w dwóch ważnych kontekstach: (a) istnienia prawidłowości oraz (b) tzw. jednorodności czasu i przestrzeni. Jeżeli przez „prawidłowość" będziemy rozumieli co najmniej dwuelementową klasę «istotnie» podobnych (resp. takich samych) zależności, to świat U_1, w którym istnieją prawidłowości, byłby prostszy strukturalnie od świata U_2, w którym byłyby tylko «niepowtarzalne» zależności, albo który byłby strukturalnie prostym chaosem. Świat U_1 byłby wtedy nb. zarazem bardziej złożony kategorialnie od świata U_2 (poza kategorią ontyczną zdarzeń byłaby w nim jeszcze kategoria ontyczna prawidłowości). Jeżeli przez „jednorodność czasu i przestrzeni" będziemy rozumieli to, że prawidłowości są takie same zawsze i wszędzie, to zachodzenie takiej jednorodności jeszcze bardziej zmniejszałoby złożoność strukturalną świata. Nb. tę sytuację można by opisać także w ten sposób, że mówiłoby się o prostocie materialnej — co do prawidłowości — czasu i przestrzeni: w każdym przekroju czasowym i przestrzennym świata «obowiązywałyby» bowiem takie same prawidłowości.

Zagadnienie prostoty/złożoności opisu świata — a więc prostoty/złożoności semiotycznej — sprowadza się do zagadnienia prostoty/złożoności języka tego opisu i teorii w tym języku wyrażonej. To ostatnie zaś warto rozpatrywać w trzech płaszczyznach: syntaktycznej, semantycznej i pragmatycznej. Odpowiednio też można mówić o prostocie/złożoności syntaktycznej, semantycznej i pragmatycznej tego opisu.

JERZY KIJOWSKI:

Cenię bardzo wszelkie wysiłki zmierzające do precyzowania pojęć. W latach siedemdziesiątych istniała wśród fizyków kontrowersja co do tego, czy całą fizykę należy formułować w języku wielkości mierzalnych, czy ważne są też wielkości bezpośrednio nieobserwowalne, w rodzaju potencjałów elektromagnetycznych. Dyskusja na ten temat pełna była różnego rodzaju nieporozumień, które trwają zresztą do dziś dnia, a które są właśnie związane z niedostateczną precyzją językową wypowiedzi jej uczestników. Jeśli chodzi o kwestię prostoty, to przypomnę, że w latach trzydziestych pełno było dowcipów na temat tego, jak skomplikowana jest teoria względności. Oto np. pewna dama pyta Einsteina, czy to prawda, że tylko dwie osoby rozumieją teorię względności. A na to Einstein: A kto to jest ten drugi? Ktoś inny znowu obliczył, że w owym czasie teorię względności rozumiało sześć osób. Kiedy dziś sam zastanawiam się, dlaczego ogólną teorię względności uważam za tak piękną i prawdziwą teorię, to tłumaczę sobie to tym, że jest bardzo prosta — w swej warstwie pojęciowej. Więc jak to jest: czy teoria względności jest prosta, czy jest skomplikowana?

JACEK JADACKI:

Jedną z rzeczy, na których mi bardzo zależy, jest zwrócenie uwagi na to, że na takie pytanie — o prostotę teorii względności — nie można odpowiedzieć, póki się nie określi precyzyjnie, o prostotę pod jakim względem chodzi. Każda teoria — niezależnie od tego, czy jest piękna czy nie, czy jest prawdziwa czy nie — jest prosta lub złożona pod wieloma względami. A dodatkowo tu jeszcze interferuje kwestia prostoty lub złożoności samego procesu rozumienia teorii. To, czy jakiś przedmiot się nam wydaje prosty lub nie, jest funkcją z jednej strony stopnia złożoności pod różnymi względami samego przedmiotu, z drugiej zaś — naszych dyspozycji intelektualnych.

LESZEK M. SOKOŁOWSKI:

Teoria względności — w przeciwieństwie do mechaniki klasycznej — jest odczuwana przez laików jako bardzo złożona: żeby ją zrozumieć, trzeba dużo studiować, a i tak człowiek wciąż pakuje się na jej gruncie w rozmaite paradoksy i trudno pojąć, dlaczego jeden zegar idzie szybciej, a drugi — wolniej. Ale to, że mechanika klasyczna jest czymś, co się względnie łatwo rozumie, natomiast teoria względności sprawia straszne kłopoty — jest wyłącznie kwestią psychologicznych przyzwyczajeń: od dzieciństwa jesteśmy uczeni efektów, które pasują raczej do mechaniki klasycznej niż do teorii względności. Tymczasem fizycy na ogół nie mają trudności w rozpoznaniu, która z tych teorii jest mniej, a która — bardziej prosta. Oczywiście, jak zwrócił uwagę Profesor Jadacki, prostotę teorii fizycznej można rozpatrywać w różnych aspektach. Na przykład mechanika klasyczna jest prostsza w tym sensie, że na jej gruncie potrafimy rozwiązać więcej zagadnień niż w ramach teorii względności: sztandarowym przykładem jest problem ruchu dwu ciał (w mechanice klasycznej jest to problem dwu mas punktowych przyciągających się siłą Newtona i rozwiązany przez Newtona; w teorii względności jest to wciąż nie rozwiązany problem dwu ładunków oddziałujących elektromagnetycznie). Jednak wśród fizyków panuje w tej kwestii *consensus*: prostota teorii to prostota jej struktury matematycznej i pojęciowej, a nie łatwość znajdowania rozwiązań zadań. Obie te teorie są teoriami czasoprzestrzeni. Mechanika klasyczna opiera się na grupie Galileusza, a szczególna teoria względności — na transformacjach Lorentza. Matematycznie grupa Lorentza jest zdecydowanie prostsza niż grupa Galileusza. Dlatego teoria względności jest prostsza od mechaniki klasycznej. Natomiast mechanika kwantowa ma zupełnie inną strukturę matematyczną i porównanie jej z mechaniką klasyczną jest w tym względzie trudne. Czy prostota, o którą tutaj chodzi, daje się wyrazić w kategoriach części składowych?

JACEK JADACKI:

Sądzę, że tak. Zapewne chodziłoby tu o przede wszystkim o prostotę syntaktyczną odpowiednich formuł matematycznych.

RYSZARD WÓJCICKI:

Konteksty, w których występuje słowo „prostota" wydają mi się tak różne, że mamy tu w istocie do czynienia z poliwalentnością: że nie ma czegoś takiego, jak ogólne pojęcie prostoty. Dlatego poszukiwanie takiego pojęcia jest chyba skazane na niepowodzenie.

JACEK JADACKI:

Gdyby nie było ogólnego pojęcia prostoty, to jaki byłby powód używania w poszczególnych różnych kontekstach tego samego słowa? Ale też gdyby to był tylko przypadek, gdyby to były tylko użycia homonimiczne, to posługiwanie się tym samym słowem na oznaczenie zupełnie różnych rzeczy byłoby czymś bardzo nieracjonalnym, jako źródło samych nieporozumień. Zakładam, że tak nie jest, a zatem że można — i trzeba — dokonać regulacji definicyjnej „prostoty w ogóle".

MICHAŁ HELLER:

Czy zaproponowana definicja regulacyjna „prostoty" odnosiłaby się również do takich przedmiotów, których części mają się do siebie np. tak, jak części wyodrębnialne w całościach nieliniowych? Czy pozwalałaby ona np. rozstrzygnąć, co jest prostsze: pole grawitacyjne pochodzące od jednej gwiazdy, czy od dwóch gwiazd?

JACEK JADACKI:

Zrekonstruowane przez mnie pojęcie jest niestosowalne tylko do takich przedmiotów, które nie mają części pod ż a d n y m względem. Niektórzy np. odczuwają pewne barwy jako bardziej, a inne — jako mniej złożone. Jeżeli tego nie da się zanalizować w kategoriach żadnych części, to podana definicja do tej sytuacji się nie odnosi.

MICHAŁ HELLER:

Pojęcie „złożoności" (*complexity*), jako korelatu „prostoty", było dokładnie analizowane m.in. w teorii informacji czy w teorii szyfrów. Sformułowane tam definicje można sparafrazować stwierdzając, że miara złożoności danej struktury byłaby liczbowo określalna jako długość najkrótszego programu komputerowego, potrzebnego, by tę strukturę wyprodukować.

JACEK JADACKI:

Taki rodzaj prostoty chciałbym nazywać „prostotą addytywną".

JÓZEF ŻYCIŃSKI:

Rozważania Bungego zawarte na kartach *The Myth of Simplicity* pozwalają na banalne skądinąd stwierdzenie, iż nie jest bynajmniej proste określenie uniwersalnych kryteriów prostoty. Pewne typy prostoty wykluczają się wzajemnie i np. prostota wyrażanych treści może wymagać wprowadzenia złożonej, wyrafinowanej notacji. Prostotę Einstenowskich równań pola można podziwiać dopiero po zastosowaniu wyrafinowanej matematyki na poziomie rachunku tensorowego. Można by zastanawiać się, jak funkcjonowałoby metodologiczne kryterium prostoty, gdyby poszukiwania podstawowych zasad fizyki relatywistycznej podjęto przed odkryciem rachunku tensorowego, Jak skomplikowane byłby równania Einsteina w języku XVIII-wiecznej matematyki? Pojawia się tu problem heurystycznych funkcji przyjętego języka.

Ponieważ niektóre typy prostoty wzajemnie się wykluczają, powstaje pytanie: jaki typ prostoty należy cenić najwyżej w praktyce badawczej? Osobiście cenię najwyżej prostotę procesu falsyfikacji, tzn. prostotę procedur, które sprawiają, że zamiast dogmatycznie bronić jakiejś teorii — wystawiamy ją w sposób maksymalistyczny na testowanie, które może stwierdzić jej fałszywość. Jest to procedura dość rzadko ceniona w kręgu współczesnych sympatyków wszystkotłumaczących systemów — od socjobiologii po postmodernizm. Szkoda, że Popperowska krytyka psychoanalizy i komunizmu jest dziś tak mało znana. Jej znajomość utrudniłaby powtarzanie tych samych błędów przez kolejne generacje.

W procesie fluktuacji nowych mód filozoficznych dość często można zauważyć niepokojącą prawidłowość. Przejawia się ona w tym, że przy krytycznej ocenie racjonalności naukowej wprowadza się odsyłacze jedynie do dorobku wczesnego Poppera, by następnie stwierdzić, iż uproszczenia tego stanowiska odbiegają od istniejącej praktyki badawczej. Tymczasem autor *Logik der Forschung* do końca życia poddawał swe poglądy krytycznej rewizji. WIdać to choćby w antologii esejów przygotowanych do druku kilka miesięcy przed śmiercią. Praca *Alles Leben is Problemlösen: Über Erkenntnis, Geschichte und Politik* (Piper, München 1995) ukazuje właśnie naukę jako zbiór problemów, w których nie ma prostych algorytmów gwarantujących sukces, istnieją jednak warunki minimalne uprawiania nauki.

DROGI ROZWOJU MATEMATYKI

ROMAN DUDA: *Rozwój matematyki a zasada falsyfikacjonizmu*

Matematyka jest elementem kultury i podlega wpływom swego otoczenia kulturowego. Do uprawiania matematyki potrzebna jest odpowiednia atmosfera, bez której matematyka zamiera i ginie. Dlatego okresy rozwoju matematyki były wyjątkiem, a nie regułą; rozwój zaś matematyki nie miał charakteru ciągłego — był skokowy.

W okresach swego rozwoju matematyka podlega stale procesom przewartościowywania i selekcji, na które wpływają działania różnych sił. Jedną z par takich sił jest para kompleksyfikacja-symplifikacja. Charakterystycznym rysem rozwoju matematyki w naszym stuleciu jest przechodzenie od badania pojedynczych obiektów do badania struktur, co wysunęło na czoło zagadnienie klasyfikacji struktur.

Mimo że w matematyce podstawowym kryterium jest tak czy inaczej rozumiana poprawność, nie wszystko, co kiedyś matematycy uznali za poprawne, na zawsze już zostaje w skarbcu matematyki. Działają tu dwie zasady: wypierania i spełniania. Zgodnie z pierwszą zasadą, porzuca się pewną teorię na rzecz innej, jeżeli ta druga jest skuteczniejsza, bądź prostsza, bądź ogólniejsza. Zgodnie z drugą zasadą, porzuca się teorię, która albo jest wyeksploatowana, albo na gruncie oczekiwań czy wiedzy twórców jest już nieeksploatowalna.

Obowiązywanie obu tych zasad jest świadectwem dużego podobieństwa matematyki i sztuki.

ANDRZEJ PELCZAR:

Poza tymi zasadami byłaby może jeszcze trzecia zasada, którą nazwałby „zasadą zamrażania". Bywają teorie, które się nagle «zacinają», ulegają «zamrożeniu», a później się jednak do nich wraca, bo okazały się do czegoś potrzebne. Tak było z badaniami nad uogólnieniami równań różniczkowych, wporwadzonymi w latach trzydziestych przez Stanisława Krystyna Zarembę z Krakowa i A. Marchauda z Paryża. Jeden z nich nazywał je równaniami paratyngensowymi, a drugi kontyngensowymi; obecnie jest to po prostu część teorii inkluzji różniczkowych. Badania Zaremby i Marchauda nie miały zrazu dalszego ciągu (były «zamrożone») i dopiero w latach pięćdziesiątych wrócono do nich w związku z początkami — a potem burzliwym rozwojem — teorii optymalnego sterowania. Związek teorii Zaremby z teorią sterowania zauważył Tadeusz Ważewski, który pokazał, jak wyniki Zaremby można zastosować w problemach sterowania.

ROMAN DUDA:

Być może zawiniła nazwa: „zasada spełniania" lub „zasada niespełniania". Może lepiej byłoby mówić o zasadzie zawieszania: zawieszania teorii, która — wydaje się — spełniła swoje zadanie, zawiodła oczekiwania, albo nie ma dalszego ciągu. Wtedy byłoby jasne, że objęłaby ona także zjawisko «zamrażania».

ELŻBIETA KAŁUSZYŃSKA:
O matematyce sądzi się, że jest nauką kumulatywną. Czy tak jest w istocie?

ROMAN DUDA:
Wbrew rozpowszechnionym poglądom, nie wszystko, co zostało w matematyce odkryte i poprawnie uzasadnione, wchodzi w zakres jej trwałego dorobku: bywają odkrycia zapominane i na nowo odkrywane.

RYSZARD WÓJCICKI:
Jednym z czynników powodujących eliminację teorii jest wykrycie w niej sprzeczności. Wygląda więc na to, że sprzeczność jest jakoś obecna w matematyce.

ROMAN DUDA:
Pewna uwaga psychologiczna. W XVIII wieku Saccheri — jezuita, profesor Uniwersytetu w Padwie — badał problem równoległych. Tok jego rozumowania był następujący: zanegował aksjomat równoległych i z nowego układu aksjomatów, obejmującego wszystkie pozostałe aksjomaty i postulaty geometrii euklidesowej oraz negację postulatu równoległych — chciał wydobyć sprzeczność. Gdyby mu się powiodło, byłby to dowód, że negacja postulatu równoległych nie daje się pogodzić z pozostałymi aksjomatami, a zatem byłby w ten sposób dowiedziony sam postulat. Do sprzeczności logicznej nie doszedł (nie mógł, jak wiemy od czasu odkrycia geometrii nieeuklidesowych), ale twierdzenia, które uzyskał i które przedstawił w swojej książce *Euclides ab omni naevo vindicatus* (*Euklides z wszelkiej zmazy oczyszczony*) z 1733 roku, wydały mu się tak niezgodne (psychologicznie sprzeczne) ze zdrowym rozsądkiem, że uznał, iż cel swój osiągnął...

STANISŁAW SĘDZIWY:
Jedna rzecz mnie poruszyła: zestawienie matematyki ze sztuką. To wywołuje natychmiast następujące pytanie, ustalające zakres analogii między matematyką a sztuką: czy jest postęp w matematyce? Wydaje się, że w sztuce postępu nie ma.

ROMAN DUDA:
Jestem innego zdania: w sztuce też jest postęp. Każdy wielki okres, np. w historii malarstwa, wiąże się z pewnym problemem, który należy rozwiązać: problemem światła, perspektywy, określonych technik itp. Kubizm np. ma coś wspólnego z początkami topologii. Z tego punktu widzenia broniłbym raczej bliskości matematyki i sztuki.

JERZY KIJOWSKI:
Bardzo podoba mi się to porównanie matematyki ze sztuką. Osobiście mam tendencję do swego rodzaju szowinizmu, polegającego na tym, aby traktować

matematykę jako język. Otóż funkcja języka jest inna niż funkcja sztuki. Tutaj rodzi się pytanie, czy to, co płodne w matemtyce, nie bierze się z zastosowań? Kiedy obserwuję pewien chaos pojęciowy, który niewątpliwie ma miejsce we współczesnej matematyce, to podejrzewam, że to, co płodne i ważne, to w sposób naturalny wiąże się z zastosowaniami. Mój nauczyciel, Profesor Maurin, powtarzał zawsze, że ludzie stworzyli wiele różnych transformacji, a transformację Fouriera storzył sam Pan Bóg — i dlatego jest ona tak ważna. Czy jest tak rzeczywiście, że to, co ważne i płodne w matematyce — bierze się z zastosowań?

ROMAN DUDA:

Profesor Kijowski powiada, że matematyka jest przede wszystkim językiem, i że wobec tego podstawowe znaczenie ma rzeczywistość nas otaczająca. Nie da się zaprzeczyć tezie, że rzeczywistość wywiera na rozwój matematyki ogromny wpływ. Ale jestem skłonny bronić poglądu, że równie ważny jest tu czynnik ludzkiej twórczości.

FALSYFIKOWALNOŚĆ W BIOLOGII

ADAM ŁOMNICKI: *Czy Darwinowska teoria ewolucji jest falsyfikowalną teorią naukową* (autoreferat)

Karl Popper, który wprowadził podatność teorii na falsyfikację jako kryterium oddzielające nauki ścisłe od metafizyki, utrzymywał, że Darwinowska teoria ewolucji jest niefalsyfikowalna. Z drugiej strony współcześni biologowie zajmujący się teorią ewolucji nie tylko uważają się za przedstawicieli nauk ścisłych, ale także akceptują Popperowskie kryterium demarkacji i uchodzą za zwolenników Popperowskiej koncepcji nauki. Skąd się wzięła ta kontrowersja i po czyjej stronie jest racja?

Gdy weźmiemy pod uwagę stan teorii ewolucji w XIX i w pierwszej połowie XX wieku, to sąd Karla Poppera wydaje się w pełni uzasadniony. Niepełna znajomość wszystkich relacji między genetyką a ewolucjonizmem, niezgodność pewnych oczywistych faktów przyrodniczych z teorią i inne przyczyny prowadziły do takiego sformułowania teorii ewolucji, które uniemożliwiało jej falsyfikację. Postęp, który dokonał się w drugiej połowie XX wieku, a być może także pośredni wpływ filozofii Poppera doprowadził do takiego sformułowania teorii, które spełnia Popperowskie kryterium demarkacji. Przyczyn tego stanu rzeczy jest kilka: postęp w znajomości zmienności genetycznej i przebiegu doboru w populacjach naturalnych, zrozumienie ewolucji altruizmu biologicznego, odrzucenie koncepcji tak zwanego «dobra gatunku» i inne. Aczkolwiek współczesna biologia ewlucyjna nie pozwala na przewidywanie dalszego biegu ewolucji, ponieważ — podobnie jak przy przewidywaniu pogody — zbyt dużą rolę odgrywa tam przypadek, to jednak pozwala na szereg innych przewidywań, które dają się empirycznie sprawdzić. W ten sposób Darwinowska teoria stała się nadrzędną teorią biologiczną, która pozwala pewne zjawiska przewidywać, a pewne z góry wykluczać.

LESZEK M. SOKOŁOWSKI:

Przed kilku laty zdałem prof. Łomnickiemu takie pytanie. Wyobraźmy sobie, że w epoce kambryjskiej na Ziemi wylądowali Marjsanie znający teorię ewolucji, tak jak my ją dziś znamy i rozumiemy. Czy po obejrzeniu trylobitów i innych okazów ówczesnej fauny potrafiliby przewidzieć, że teraz, po upływie sześciuset milionów lat, będą po Ziemi chodzić słonie, małpy i żyrafy? Odpowiedź była: nie, tak szczegółowych przewidywań teoria ewolucji nie jest w stanie zrobić. Teoria ewolucji nie byłaby w stanie przewidzieć nawet powstania kręgowców, dopóki organizmy te nie pojawiły się.

Zdaniem fizyka teoria powinna dawać ścisły opis jakościowy i ilościowy zjawisk przyrodniczych, do czego biologii nadal dość daleko, oraz powinna wykluczać pewne zjawiska, które można sobie wyobrazić. Czy teoria ewolucji wyklucza istnienie jakichś struktur biologicznych?

ADAM ŁOMNICKI:

Owszem. Wykluczone jest obecnie istnienie skomplikowanych i kosztownych energetycznie struktur, które niczemu nie służą. To można uznać za ogólną zasadę. Wszystkie organizmy żywe są strukturami optymalizującymi szanse przeżycia i wydania potomstwa.

LESZEK M. SOKOŁOWSKI (komentarz dodany w druku):

Przeszło trzydzieści lat temu Stanisław Lem (*Summa technologiae*) zwrócił uwagę na to, że ewolucja technologiczna naśladuje w dużym stopniu ewolucję biologiczną. W rozwoju techniki jest tak, że maszyna energochłonna, kosztowna w eksploatacji, jest bezwzględnie eliminowana przez maszynę o podobnych możliwościach, lecz energooszczędną. Jeżeli przyjąć, że analogia ta idzie też w drugą stronę, tzn. główne mechanizmy obu ewolucji są podobne, to odpwoiedź prof. Łomnickiego brzmi jak zupełna oczywistość. Zarazem zdroworozsądkowość jego odpowiedzi jest trochę niepokojąca. Czyżbyśmy się już tak przyzwyczaili do teorii ewolucji i obowiązywania zasad ekonomii w całym świecie istot żywych, że odpowiedź ta niczym nas nie dziwi?

Sądzę, że niebanalność odpowiedzi tkwi w sformułowaniach „które niczemu nie służą" oraz „optymalizacja tych aspektów", i te pojęcia wymagają ściślejszego zdefiniowania. Społeczeństwo ludzkie jest strukturą skomplikowaną, która zużywa na głowę jednostki bez porównania więcej energii niż jakiekolwiek inne organizmy, a mimo to — a właściwie dzięki temu — człowiek znakomicie prosperuje. W jego przypadku ewolucjia biologiczna wygenerowała ewolucję technologiczną. A termity? Czy ktoś badał bilans energetyczny kopca termitów i porównywał zużycie energii na jednego termita z energetyką podobnych mu owadów? Rzeczą zasadniczą jest określenie, w przestrzeni jakich parametrów dokonuje się optymalizacji procesów zużycia energii.

JACEK URBANIEC:

Skąd pochodzi zainteresowanie biologów ideami Poppera?

ADAM ŁOMNICKI:

Bardzo wielu biologów albo bezpośrednio zetknęło się z Popperem, i z jego poglądem, że nauki empiryczne muszą być falsyfikowalne, albo od innych to słyszało. Dlatego uważam, że biologom filozofia jest potrzebna. Biologowie mogą oddzielać ziarno od plew, będąc doktrynalnymi popperystami.

ANDRZEJ LASOTA:

Tak się składa, że budowałem biologom modele matematyczne, na samej biologii się jednak nie znam. Ośmiela mine jednak zdanie mojego przyjaciela, Profesora Zdzisława Opiala, który powiedział mi kiedyś: inni ludzie to mają coś do powiedzienia, a ty to masz głupie pomysły.

Otóż chciałbym powiedzieć, że drzewko ewolucyjne przypomina mi fraktal. To nie jest zwykły zbieg okoliczności. Jeżeli spojrzeć na istniejące już gatunki, to można je traktować jako atraktor pewnego układu dynamicznego. Wszystkie inne wyginęły, a utrzymały się te, które zostały ściągnięte przez prawo stabilności w jakieś koleiny. Jeśli tak, to typowym atraktorem jest taki fraktal, którego miara w stosunku do miary zwykłej przestrzeni Euklidesowej jest singularna.

ADAM ŁOMNICKI:

Myślę, że stosowanie wyników teorii fraktali może być bardzo płodne w embriologii i teorii struktur morfologicznych. Natomiast nie widzę możliwości zastosowania w teorii ewolucji, gdyż na ostateczny wynik procesu ewolucyjnego wpływa zbyt wiele zjawisk przypadkowych.

JACEK JADACKI:

Niektórzy filozofowie bardzo nie lubią pojęcia *przypadku* — ze względu na przywiązanie do determinizmu.

RYSZARD WÓJCICKI:

Czy prace Hamiltona są istotnym elementem w rozwoju socjobiologii?

ADAM ŁOMNICKI:

Moim zdaniem — podstawowym, chociaż początkowo nie zwrócono co prawda — jak to nieraz bywa — uwagi na te prace.

ANDRZEJ FULIŃSKI:

Czy we współczesnej teorii ewolucji są eksperymenty ze ściśle kontrolowanymi warunkami brzegowymi?

ADAM ŁOMNICKI:

Tak, np. przy badaniu mutacji bakterii.

MATEMATYKA I FILOZOFIA

ANDRZEJ LASOTA:

Wygłoszę sześć tez, z których każda spotka się zapewne z krytyką. Niemniej jednak charakteryzują one mój punkt widzenia i z chęcią wysłucham głosów polemicznych, gdyż pozwolą mi może ten mój punkt widzenia ulepszyć lub skorygować.

Motto dla swojej wypowiedzi wziąłem z Profesora Steinhausa: *Przedmiotem matematyki jest rzeczywistość. Matematyka jest uniwersalna.* Muszę powiedzieć, że ja się bardziej niż zgadzam z tymi dwiema myślami.

Pierwsza moja teza brzmi: matematyka jest strukturą naszego świata. Gdyby był inny świat, byłaby inna matematyka, albo nie byłoby matematyki; gdyby świata nie było, nie byłoby matematyki. Proszę zwrócić uwagę na to, że dziecko nie zna świata i dlatego nie zna matematyki. Dziecko sobie nie zdaje sprawy z tego, że jeden plus jeden jest dwa — nie dlatego, że jest za mało inteligentne, tylko że tego nie sprawdziło doświadczalnie. Każde odpowiednio małe dziecko, które jednak umie już mówić, można nabrać w ten sposób, że się każe mu wyjrzeć przez okno i sprawdzić, czy ono bawi się na podwórku — i ono to zrobi. Można sobie wyobrazić świat, np. w koszmarach sennych, w którym wszystkie przedmioty się ze sobą zlewają i nie dają się jedne od drugich oddzielić. Czy w takim świecie powstałoby pojęcie liczby naturalnej? Po co?

Teza druga: rozwój matematyki jest pozornie kolosalny. Wzrasta szybciej niż eksponencjalnie ilość prac; wystarczy wziąć centymetr i pomierzyć roczniki *Mathematical Review*. Wzrasta też bardzo ilość rozwiązanych starych klasycznych problemów. *De facto* jednak od pewnego czasu «przestawiamy te same klocki». Każdy porządny wykład matematyki zaczyna się mniej więcej tak: Rozważamy przestrzeń *A*, *B*, *C*. *A* to jest to, *B* to jest to, *C* to jest to. Na przykład, *A* to jest niepusty zbiór, *B* — algebra podzbiorów, *C* — miara. No to będzie rachunek prawdopodobieństwa. Albo *A* to jest niepusta przestrzeń, *B* — rodzina podzbiorów, spełniająca pewne aksjomaty. To będzie topologia. Itp., itd. Nic się tutaj nie zmieniło od początku lat trzydziestych — od czasów powstania sformalizowanego rachunku prawdopodobieństwa. Nawiasem mówiąc, nie zgadzam z poglądem, że zawsze aksjomatyzacja jest «grobem» czy «epitafium» dla danej dziedziny nauki. Akurat aksjomatyzacja rachunku prawdopodobieństwa, dokonana przez Kołmogorowa, niesłychanie popchnęła naprzód tę dziedzinę. O ile proste rachunki z teorii gier hazardowych były przed Kołmogorowem możliwe, o tyle budowa porządnej teorii procesów stochastycznych jest możliwa dopiero po Kołmogorowie. A teoria procesów stochastycznych jest dziś podstawową teorią nie tylko w matematyce, ale praktycznie rzecz biorąc — w całej nauce. W każdym razie od czasów Kołmogorowa nie pojawiły się w matematyce żadne istotnie nowe idee. Jednym z powodów tego stanu rzeczy jest system organizacji nauki. Miałem tę przyjemność, że byłem studentem Profesora Lei i Profesora Ważewskiego; obaj świetnie znali Lebesgue'a, który dziś żadnego grantu by nie dostał. I w Polsce, i w Stanach Zjednoczonych, widziałem odrzucone granty tylko dlatego, że jegomość nie napisał tak: Będę badał równanie Pypczyńskiego metodą Pypsa. Jak tak napiszesz — Pypczyński i Pyps są znani — grant masz! Ale jak napiszesz, że chcesz zbadać nową własność procesów stochastycznych taką-a-taką i nie podasz literatury, a w spisie prac za ostatnie cztery lata nie masz dziesięciu publikacji w międzynarodowych czasopismach — grantu nie ma! System grantowy obcina wszystkich słabych — i obcina wszystkich genialnych. Są tacy specjaliści, którzy nie mają nigdy problemów z grantami, ale ich prace nie przynoszą nam żadnych korzyści — poza stratą pewnej ilości drzew.

Trzecia teza: wydaje mi się, że pewne trudności np. w zakresie fizyki, biologii i wielu innych nauk, związane są z tym, że stała się rzecz niedobra: matematyka opóźniła się w stosunku do rozwoju tzw. nauk szczegółowych. Tak być nie musi i tak — nie będzie. Głęboko wierzę, że tak jak po okresie, kiedy matematyka była teorią liczb czy figur, przyszedł okres, kiedy stała się teorią zbiorów, klas i funkcji, tak i po tym okresie przyjdzie czas, kiedy pojawią się nowe, ogólne pojęcia, i nowe, ogólne metody, które być może pchną do przodu nie tylko samą matematykę, ale i inne nauki. Próby w tym kierunku są już podejmowane. Mówi się np. o zbiorach rozmytych. Nawiasem mówiąc związane są z nimi zabawne nieporozumienia. Z jednej strony bardzo znany uczony zaproponował mi ostatnio, aby matematycy «przegłosowali» niezajmowanie się zbiorami rozmytymi, bo to jest kompletny nonsens. Z drugiej strony w pewnym popularnonaukowym czasopiśmie amerykańskim przeczytałem, że Japonia przegoniła Amerykę, bo Japończycy znają się na zbiorach rozmytych, a Amerykanie — nie. Poza teorią zbiorów rozmytych — słyszy się o teorii fraktali, o teorii chaosu. Czy to jest to, na co czekamy? Osobiście początkowo bardzo podejrzliwie czytałem np. o fraktalach, choć miałem przyjemność znać Barnsleya, zanim się zajął fraktalami — jak się okazało — nie tylko z matematyczną, ale i handlową pasją (do propagowania swoich idei zorganizował specjalną, znakomicie — przynajmniej do niedawna — prosperującą kompanię *Iterated Function*). Z jego książek na ten temat — napisanych w typowo amerykańskim stylu — wynikało, że pod wpływem teorii fraktali radykalnie zmieni się cały nasz światopogląd. Tymczasem trochę zająłem się fraktalami, ale mój światopogląd jakoś nie runął. Teoria fraktali znajduje rzeczywiście wiele zastosowań. Myślę jednak, że to jeszcze nie jest to: ani matematyka chaosu, ani teoria fraktali, ani teoria zbiorów rozmytych — choć są tak bardzo kontrowersyjne, wzbudzając w jednych (m.in. we mnie) entuzjazm, w innych zaś wiele słusznych zastrzeżeń.

Teza czwarta: odkrycia matematyczne mają istotne filozoficzne znaczenie. Tutaj odwołam się do teorii chaosu i probabilistyki.

Sprawa pierwsza. Zgodnie z twierdzeniem Kima — zresztą przez wielu udowodnionym i uogólnionym — operator Markowa, przekształcający gęstości w gęstości, rozkłady probabilistyczne w rozkłady — daje się aproksymować w topologii mocnej zbieżności przez operator pochodzący od transformacji deterministycznych. Znaczy to, że *de facto*, przynajmniej w skończonym odcinku czasowym, jeżeli badamy jakikolwiek proces, który jest kompletnie probabilistyczny, to jeżeli tylko założymy, że być może popełniamy jakiś błąd, to badamy *de facto* proces deterministyczny. Z drugiej strony, zgodnie z klasyczną mechaniką statystyczną, jest wiele procesów, które wyglądają na deterministyczne, są w istocie wynikiem procesów stochastycznych, odpowiednio stabilnych lub rozpatrywanych z odpowiednio dużego dystansu.

Sprawa druga. Każdy badacz przyjmuje jako naturalne założenie, że świat jest poznawalny i podlega możliwie najprostszym prawom. Lorenz, ten od pogody, w jednej ze swoich prac — jeszcze zanim sformułował swoje sławne równania — postawił następujący problem. Rozważmy najprostszy układ, jaki możemy sobie wymyślić na odcinku [0, 1]. Naturalnie najprostszym byłby liniowy, ale linia na odcinku [0, 1] byłaby nieciekawa. Weźmy więc kwadratowy: parabolę. Otóż do dzisiejszego dnia nie wiemy wszystkiego o iteracji przez parabolę. Wiemy tylko tyle, po pierwsze, że jeśli się przekroczy $x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n)$, to jeżeli jesteśmy blisko $\lambda = 4$, to wiadomo np., że przy niewielkiej zmianie parametrów przeskoczymy nieskończenie wiele stanów stabilnych i nieskończenie wiele stanów niestabilnych oraz jeszcze inne stany, które są w ogóle poza tą klasyfikacją. Po drugie, jeżeli będziemy w pobliżu $\lambda = 4$, to parabola będzie zwiększała średnio dwukrotnie błąd. Czasem pokazuję swoim studentom, że jeżeli weźmiemy na dwóch komputerach jednakowe warunki początkowe, to na 48 iteracji wyniki będą się różniły o rząd wielkości równy przestrzeni fazowej. Zatem nawet gdybyśmy mieli świat tak prosty, jak odcinek [0, 1] i wszystkie prawa fizyki, chemii i biologii tworzyłyby jedno prawo o postaci $x_{n+1} = 4 x_n (1 - x_n)$, to i tak nie moglibyśmy się dowiedzieć, co będzie za 47 pokoleń. Przewidywanie okazuje się więc wielką iluzją. To jest właśnie przykład filozoficznego znaczenia twierdzeń matematycznych.

Piąta teza: mimo że matematyka jest istotnym narzędziem badania świata, to nie wszystko daje się przy pomocy matematyki rozwiązać. Matematyka bardziej należy, według mnie, do sfery materii — niż do sfery ducha. Odkrycia matematyczne — tak jak wszelkie inne odkrycia — są potrzebą ducha, natomiast sama matematyka należy do sfery materii. Oto fragment ze Steinhausa, w którym mówi on o zjawisku, zwanym świadomością: *Paradoks jaźni. Gdy uznam wielość istnień podobnych, to zdumiewający fakt, że jedno z nich — nie wiadomo dlaczego — jest «ja», i że jej tylko ból boli, jej tylko picie smakuje, staje się przepastną zagadką.* Tyle Steinhaus. Nie przypuszczam, ażeby jaźń dała się wytłumaczyć przy pomocy modelu matematycznego.

I ostatnia moja teza: matematycy — dobrzy, porządni matematycy, nie tacy, jak ja — nie znoszą probabilistyki. Pamiętam, jak bardzo mnie lubiano na seminarium Profesora Ważewskiego. Było to ćwierć wieku temu. Nawet on, który doceniał probabilistykę, kazał mi referować procesy Dinera. Bardzo zresztą na tym skorzystałem. Ale kiedy sam zacząłem mówić np., że badam jakieś nierówności stochastyczne, to przyjmowano to niechętnie. I dzisiaj, kiedy się rozmawia z bardzo dobrymi matematykami o bardzo prostych zagadnieniach probabilistycznych, to nie można z nimi dojść do porozumienia. Trudno wytłumaczyć im np., że nie można sobie wybrać dowolnej liczby naturalnej w sposób przypadkowy. Można powiedzieć: wybieram przypadkową liczbę naturalną od 1 do 10. Ale nie ma sensu powiedzieć: wybieram przypadkową liczbę naturalną. Co prawda, jeśli się zaakceptuje — znaną ze schematów Kołmogorowa —

aksjomatykę Reniego, to takie zdanie zaczyna nabierać sensu, ale jako zdanie warunkowe. Tak więc — matematycy nie lubią probabilistyki. W niedawno wydanej książce o historii współczesnej matematyki nie ma nawet wzmianki o rachunku prawdopodobieństwa. Ja natomiast twierdzę, że rachunek prawdopodobieństwa jest dziedziną, która rozwija się w sposób dynamiczny i jest pożyteczna we wszystkich naukach i nie tylko. Podczas ostatnich wyborów prezydenckich we Francji obliczono tak dokładnie przyszłe wyniki, że nikt nie miał wątpliwości, że błąd tych obliczeń nie przekroczy 3%. Nawiasem mówiąc, jeden z najlepszych specjalistów rosyjskich w dziedzinie probabilistyki, przebywający obecnie w Ameryce, został tam zatrudniony nie przez instytut matematyczny, lecz przez instytut statystyczny. Wierzę, że pewnego dnia probabilistyka będzie odrębną dyscypliną wiedzy.

ANDRZEJ PELCZAR:

Muszę stwierdzić, że — przynajmniej na razie — probabilistyka jest częścią matematyki. Zresztą w sprawie stosunku matematyka—probabilistyka: to, nieprawda, że matematycy nie lubią probabilistów: być może niektórzy nie lubią ... probabilistyki.

Jeśli chodzi o ilościowy przyrost matematyki, to Lebesgue powiedział swego czasu o Stanisławie Zarembie, że nie napisał on żadnej pracy niepotrzebnie. Pamiętam, że Profesor Lasota, kiedy jeszcze nie był profesorem, zapytany przez kogoś — po seminarium Ważewskiego — o to, ile ma prac, powiedział tak: niestety więcej niż Lebesgue, ale mniej niż ... — i tu wymienił pewnego znanego matematyka. Już wtedy więc miał krytyczny stosunek do zjawiska nadprodukcji matematycznej.

ROMAN DUDA:

Spróbuję odnieść się krytycznie do niektórych tez Profesora Lasoty.

Teza pierwsza Profesora Lasoty — że matematyka jest strukturą naszego świata — zakłada, że świat zewnętrzny dokonuje czegoś w rodzaju projekcji na nasz umysł i my odpowiadamy na tę projekcję, tworząc pewne struktury matematyczne. Tymczasem często bywa przeciwnie: to umysł sam dokonuje projekcji na świat zewnętrzny. Dowodem są idee, których w świecie zewnętrznym nie ma, które są immanentnym tworem ludzkiego umysłu.

Oto idea nieskończoności. W świecie zewnętrznym nieskończoności nie ma. Świat zewnętrzny składa się ze skończonej liczby jednostek — nieważne jak się one nazywają — i wielkość tej liczby można oszacować. Idea ta powstała w mózgu, który składa się ze skończonej liczby neuronów — podobno 10^{12}. Przypomnę, jak się idea nieskończoności rodziła. Jej pierwsze ślady mamy u Euklidesa, który pokazuje — mówiąc naszym językiem — że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych. W istocie rzeczy pokazuje on coś znacznie mniej: że dla każdego skończonego układu liczb pierwszych istnieje liczba, która się nie dzieli przez żadną liczbę z tego układu. Dalej, idea nieskończoności pojawia się u Zenona z Elei, od razu w postaci paradoksu. Znaczy to, że rodzi się ona wbrew otaczającemu nas światu. Idea nieskończoności nie tylko nie jest projekcją tego świata, ale kiedy próbujemy ją w ten świat projektować, to nastręcza to nam ogromne trudności.

Chciałbym też zapytać Profesora Lasotę, gdzie w świecie zewnętrznym są nieosiągalne *alefy*?

Przykładów idei, które powstały w ludzkim umyśle bez wyraźnego związku ze światem, jest więcej.

Weżmy np. wymiar. Do XIX wieku przeważał pogląd, że wymiarów może być co najwyżej trzy, bo co najwyżej trójwymiarowe przedmioty oglądano w świecie zewnętrznym. Miało to znamienny wpływ na sposób uprawiania algebry: algebraicy przez długi czas nie chcieli rozpatrywać potęg większych niż 3, jako pozbawionych fizycznego znaczenia. Riemann, tworząc koncepcję n-wymiarowej rozmaitości, wyraźnie odwołał się do poglądów filozoficznych Herbarta — z początku XIX wieku.

Moim zdaniem matematyka ma podwójne źródło. Jednym jest świat zewnętrzny, który dostarcza nam wielu problemów; z tego źródła wywodzi się np. transformacja Fouriera. Ale jeszcze ważniejszym źródłem matematyki jest immanentna, niezależna od bodźców pochodzących z zewnątrz, działalność ludzkiego umysłu.

GŁOS Z SALI:

Skoro matematyka jest tworem umysłu ludzkiego, to dlaczego — jak do tej pory — wszystkie wielkie teorie matematyczne znalazły zastosowania i to zastosowania «wulgarnie» praktyczne?

ROMAN DUDA:

To dotyka rzeczywistej trudności, związanej z poglądem, którego bronię. Skoro matematyka jest projekcją umysłu ludzkiego na świat, to dlaczego jest ona tak doskonale efektywna?

Na to pytanie nie ma dobrej odpowiedzi, a w każdym razie — nie ma odpowiedzi powszechnie akceptowanej. Próbował odpowiedzieć na to pytanie Wigner w głośnym i szeroko znanym artykule „Niezrozumiała efektywność matematyki". Mnie osobiście bliski jest pogląd, związany chyba z Kantem. Struktura biologiczna mózgu i wynikający stąd charakter związków między umysłem a światem zewnętrznym wymusza pewne sposoby widzenia, pewne struktury myślenia.

Jeśli chodzi o drugą tezę Profesora Lasoty — o ekstensywnym dziś rozwoju matematyki — to chciałbym podkreślić, że zdaniem niektórych, po 1940 roku pojawiło się więcej wielkich problemów i dokonano więcej ważnych odkryć matematycznych niż w ciągu całych jej dziejów przed tym rokiem. Nie ma jednak żadnych powodów, aby mniemać, że ten dobry okres dla matematyki będzie trwał zawsze. Tego rodzaju pogląd nie ma żadnego uzasadnienia i świadczyć może — co najwyżej — o naszym dobrym samopoczuciu. Taka dobra passa może się skończyć niedługo i bardzo raptownie. Może się np. skończyć przez «zamulenie» źródeł informacji. Może się też skończyć tak, jak to opisuje Hermann Hesse w swojej książce *Gra szklanych paciorków*, którą zresztą napisał pod wpływem Hermanna Weyla. Kilkanaście lat temu Ulam ocenił, że co roku przybywa 200 tysięcy twierdzeń matematycznych. Nie ma żadnego sposobu rozeznania, które z nich są wartościowe, a do których nie warto zaglądać.

ANNA KANIK:

Czym są te wielkie problemy, które stymulują rozwój matematyki, po rozwiązaniu których zainteresowanie daną dziedziną matematyki wygasa? Czy przypadkiem dopiero *post factum* nie oceniamy danej teorii jako tej, która się wyczerpała, ponieważ rozwiązała to i to?

Być może jest tak, że nie ma wielkich problemów, które w końcu rozwiązujemy, lecz są wielkie pytania, które wyznaczają kierunek badań i jeśli matematycy się zajmują danymi pytaniami, to w danym kiedunku rozwija się matematyka. Czy zagadnienie czterech barw jest lub było wielkim problemem, czy też jedynie pytaniem wyznaczająym kierunek badań, z których rozwinęła się np. teoria grafów? Czy Ostatnie Twierdzenie Fermata jest wielkim problemem do rozwiązania, czy może raczej dopiero jego rozwiązanie pokaże, czy takim jest, czy też jest jedynie kierunkiem badań łączącym wiele dziedzin matematyki?

ROMAN DUDA:

Nie ma innej drogi, jak wskazanie przykładu takiego wielkiego problemu. Był nim, moim zdaniem, problem równoległych. Powstał on jeszcze w starożytności i w dużym stopniu zdominował badania geometryczne. Idzie o rozstrzygnięcie, czy piąty postulat Euklidesa jest zależny, czy niezależny od pozostałych, Takim wielkim problemem współczesnym jest problem Poincarégo, hipoteza, która należy do topologii. To były wielkie problemy, bo nie dawały się rozwiązać dotychczasowymi metodami: zmuszały do stworzenia nowych technik, nowych punktów widzenia. Takim problemem było Wielkie Twierdzenie Fermata, a jego rozwiązanie — podane przez A. Wilesa — opiera się na teorii krzywych eliptycznych, a więc pewnym dziale geometrii algebraicznej.

Chciałbym jeszcze skomentować ostatnią tezę Profesora Lasoty, że matematyka należy bardziej do sfery materii niż do sfery ducha. Odwołam się do ulubionego uczonego Profesora Lasoty — do Steinhausa. Na jego nagrobku we Wrocławiu wyryta jest sentencja: *Między materią a duchem pośredniczy matematyka.*

STANISŁAW SĘDZIWY:

Pragnę zwrócić uwagę na pewien nowy trend, pojawiający się w matematyce: dowodzenie wspierane komputerowo. Jest on związany z pojawieniem się czynnika czasu w matematyce.

Jak wiadomo, problemy algebraiczne — w rodzaju układu równań — można rozwiązywać metodą wyznaczników. Ale jeżeli równań jest dużo, to liczba operacji mnożeń zaczyna bardzo wzrastać. Jeżeli czas rozwiązywania problemu będziemy mierzyli liczbą wykonywanych mnożeń, to okaże się, że metoda wyznaczników właściwie przestaje funkcjonować. W związku z tym pojawia się kwestia znalezienia jakiegoś innego sposobu rozwiązywania, który skróciłby czas obliczania. Czynnik czasu — przy metodach numerycznych — można zatem utożsamić z liczbą typowych operacji, które trzeba wykonać, aby dany problem rozwiązać. To jest jeden przykład ingerencji czasu w matematyce.

Dopóki nie było maszyn cyfrowych i człowiek musiał te operacje wykonywać ręcznie, problemy wymagające wielu obliczeń nie były rozważane: to czynnik czasu był trochę ignorowany. Objawiało się to m.in. w tym, że matematycy przyjmowali, że jeśli jest jakiś problem, o którym sądzono, że jest rozwiązalny, to prędzej czy później zostanie on rozwiązany, a czy stanie się to po roku, dwóch, czy dziesięciu — to ich specjalnie nie obchodziło. Dzisiaj, kiedy zadanie rozwiązania danego problemu jest stawiane przez kogoś z zewnątrz, to zamawiający chce rozwiązanie mieć «zaraz», bo jest mu ono potrzebne, żeby np. zbudować most, zbadać przekrój czynny w rozważaniach fizycznych itd. Sytuację powyższą można opisać tak: mamy zastany zespół algorytmów i dołączamy do niego jeszcze czas — a więc liczbę obliczeń potrzebnych do rozwiązania zadania. Poszukujemy więc takich algorytmów, które możliwie szybko prowadzą do celu.

Drugi przykład ingerencji czasu w matematyce pochodzi z całkiem abstrakcyjnych sytuacji, w których nie ma żadnych presji ze strony zastosowań. Weźmy np. hipotezę czterech barw. Sprowadzono dowód hipotezy do rozstrzygnięcia pewnego zagadnienia teorii grafów. Trzeba było w związku z tym przebadać pewną liczbę możliwości. Była ona tak duża, że jedna osoba nie byłaby w stanie się z takim zadaniem uporać. Zaprzężono więc do pracy pewien program, który wykonał niezbędne obliczenia i w efekcie uznano twierdzenie za udowodnione. Pojawia się tu delikatna kwestia, do jakiego stopnia, mając produkt matematyczny w postaci dowodu wspieranego komputerowo, wolno nam go uznać za dowód poprawny.

Trzeci przykład jest taki. Okazało się ostatnio, że można badać układy dynamiczne — tj. układy, w których czas lub parametry zmieniają się w sposób ciągły — przez układy, które mają skończoną liczbę stanów i w których czas zmienia się w sposób dyskretny. Tutaj znów, jak w poprzednim wypadku, zachodzi sytuacja, że mamy bardzo dużo danych, chcemy coś sprawdzić — i to zajmuje bardzo dużo czasu. Obliczenia musimy przeprowadzić nie na liczbach całkowitych, tylko na liczbach przybliżonych. Trzeba więc przeanalizować błąd i «zapanować» nad nim: zarówno nad zaokrągleniami, jak i obcięciami. Powstają tu znowu dramatyczne kwestie, w rodzaju tych, które pojawiły się w wypadku hipotezy czterech barw, kiedy to podczas pisania samego programu usunięto kilka błędów w systemie operacyjnym, które dopiero wtedy zauważono. Zdarza się też i tak, że program jest dobry, ale używamy komputera, na którym liczonych jest równocześnie kilka zadań — i błąd może się pojawić w czasie wprowadzania jakiegoś innego zadania. Mamy więc w istocie do czynienia z jakimś obiektem fizycznym, który produkuje nam dowód. Kiedy sami przeprowadzamy dowody, to czytając je — w jakimś sensie odpowiadamy za stan swoich umysłów i możemy być kontrolowani na bieżąco przez obserwujące nas osoby. W wypadku maszyny polegamy po prostu na informacji, że została ono odpowiednio przetestowana i działa bezbłędnie.

Jak należy więc ostatecznie w ogóle rozumieć dowód? Dowody w takim stopniu ścisłe, jak to sobie niegdyś wyobrażali badacze, zajmujący się podstawami matematyki, rzadko są realizowane. Z drugiej strony, za dowód uznaje się nieraz zaledwie szereg niezbyt uporządkowanych hipotez. Między tymi skrajnościami są dowody, które odwołują się do rzeczy powszechnie znanych, a potem okazuje się, że te powszechnie znane rzeczy wcale nie są tak zupełnie pewne, jak myślano — że mają one jakieś luki, bo ktoś tam czegoś nie zauważył. Te rzeczy są do «przełknięcia», kiedy odpowiednie dowody są produkowane bezpośrednio przez umysł ludzki — lub przez ludzi bezpośrednio kontrolowane. W wypadku komputerów jesteśmy pozbawieni możliwości takiej bezpośredniej kontroli.

ANDRZEJ PELCZAR (wypowiedź rozszerzona w druku):

Zajmujemy się filozofią i matematyką. Pozwolę sobie więc poruszyć pewne zagadnienia, które zostaną zapewne włączone niebawem do badań z zakresu podstaw matematyki, a traktowane szerzej, staną się — jak sądzę — przedmiotem poważnych dociekań filozoficznych. Mam na myśli wszystko to, co wynika z pojawienia się komputerów w badaniach matematycznych.

Obecność komputerów w matematyce została zauważona chyba nie tak dawno. Wydaje się, że po raz pierwszy zaczęto o tym problemie dyskutować w związku z wiadomością o rozstrzygnięciu problemu czterech barw. Od tego czasu rachunki i rozumowania przeprowadzone przy pomocy komputerów, w tym także rozumowania w dowodach różnych twierdzeń, pojawiają się coraz częściej i coraz częściej mówi się o potrzebie ustosunkowania się do tej «nowej jakości» w matematyce.

W czasie ostatniego Międzynarodowego Kongresu Matematyków w Zürichu (*ICM 94*) było niemało wystąpień (z godzinnymi referatami plenarnymi włącznie), w trakcie których była mowa o „komputerowym wspomaganiu dowodów", o „dowodach przy pomocy komputerów", a także o „prawie dowodach" („prawie" — bo z użyciem komputera); usłyszałem nawet nieoficjalne chyba, ale powiedziane publicznie, sformułowanie, mówiące o „dowodzie z danym prawdopodobieństwem". Były referaty poświęcone *explicite* lub *implicite* tym zagadnieniom, ale z reguły koncentrowały się na aspektach technicznych, a nie filozoficznych. Pewne próby zajęcia stanowiska co do podstaw teoretycznych i filozoficznych, połączone *de facto* z próbami jakiegoś formalizowania, można było jednak zaobserwować nawet wtedy, gdy autor zajmował się niemal wyłącznie aspektami technicznymi używania komputerów. Nawet i to, że ktoś powiedział o „dowodzie prawdopodobnym", świadczy o chęci podkreślenia (formalnego?) różnicy między tym, co uważamy jeszcze ciągle za prawdziwy («czysty») dowód, a tym, co daje użycie komputera.

Można wyróżnić trzy typy stanowisk, prezentowanych przez matematyków, którzy prowadzą teraz badania przy (istotnym) użyciu komputerów.

(1) Prowadzi się rozumowania, w których występuje, często dość znacznie sformalizowany, «margines bezpieczeństwa», eliminujący możliwe błędy, wynikające z tego np., że komputer obcina dalekie miejsca po przecinku i «zaokrągla» otrzymane wyniki (chodzi tu w szczególności o rozumowania, w których rozważa się nierówności, a nie równości). Występują przy tym pewne próby formalizacji.

(2) Próbuje się przyjąć za dopuszczalną, albo raczej wprowadza się do matematyki, nową «klasę dowodów», co do której będzie się — z założenia — zadowalało tym, że będą to «prawie dowody» lub «dowody z pewnym prawdopodobieństwem». I w tym wypadku, z reguły zresztą tylko *implicite*, próbuje się proponować pewne formalizmy, a czasem może tylko przygotowywać wstępne kroki formalne.

(3) Przechodzi się do porządku dziennego nad tym, że używanie komputerów kreuje problemy związane z brakiem ścisłości w sensie do tej pory przyjmowanym w matematyce za — mniej lub bardziej — powszechnie obowiązujący, i zadowala wynikami otrzymanymi w ten sposób. Sprawę uporządkowania formalnego zostawia się przy tym «na przyszłość».

Trudno w tej chwili wyrokować, jak może wyglądać w przyszłości to ostatnie porządkowanie.

Można chyba przypuszczać, że jedna z dróg będzie taka: oprócz pojęć pierwotnych i aksjomatów danego systemu aksjomatycznego, pojawią się «dodatkowe pojęcia pierwotne» (np. „program komputerowy") oraz «dodatkowe aksjomaty» (np.: „program jest poprawny", „konstrukcja komputera jest poprawna"). Cudzysłowy zostały użyte w tych sformułowaniach nie przypadkowo; są oczywiście konieczne! Tak, czy inaczej trzeba będzie jakoś określić, co rozumie się przez «matematykę komputerową» (bez upierania się przy takiej — całkiem prowizorycznej — nazwie).

Wydaje się, że stoimy w obliczu nie tylko technicznej rewolucji, spowodowanej komputeryzacją, ale także przed bardzo istotnymi zmianami pojęciowymi. Mamy naprawdę nową jakość w matematyce, i pasjonujące problemy filozoficzne i formalne, czekające na poprawne postawienie i ... rozwiązanie.

ANNA KANIK (komentarz dodany w druku):

Profesor Sędziwy zwrócił uwagę na pojawienie się nowego zagadnienia dotyczącego poznania matematycznego — na problem czasu w matematyce. Problem ten wiąże się ze stosowaniem komputerów do dowodzenia twierdzeń. W 1976 r. K. Appel, W. Haken i J. Koch przedstawili do zaakceptowania dowód twierdzenia o czterech barwach, który istotnie zależy od użycia komputera. Pomijając wyniki pracy komputera otrzymalibyśmy niekompletny dowód, który mógłby przesądzać zarówno na rzecz hipotezy czterech barw, jak i przeciw niej. Użycie komputera było konieczne do wykluczenia możliwości kontrprzykładów dla około tysiąca przypadków szczególnych — takich, że badania tych przypadków wymagały różnych metod rozwiązania. Czas potrzebny do zbadania wszystkich tych przypadków wynósłby około 10 milionów godzin pracy ludzkiej, co przekracza o trzy rzędy wielkości najdłuższy wyobrażalny wysiłek ludzki. Appel i Haken stwierdzają, że ich dowód bez pomocy komputera nie tylko nie jest możliwy, ale wręcz nie jest wyobrażalny. T. Tymoczko oszacował, że trzeba by było kilku pokoi na pomieszczenie wydruku dowodu komputerowego lematu z zagadnienia czterech barw.

Czas jest uwikłany na dwa różne sposoby w dowody komputerowe.

Po pierwsze, zagadnienie czasu związane jest z możliwościami technicznymi pracy komputera. Jest to zagadnienie kwalifikacji programu, tj. tego, czy dany komputer ma odpowiednie możliwości wykonania programu, a w szczególności, czy ma odpowiednią pojemność pamięci, szybkość dostępu do niej, odpowiednio szybki procesor, właściwą ilość procesorów oraz rodzaj pamięci operacyjnej. I tutaj rozpatruje się zagadnienie optymalizacji programu czyli proporcji ilości pojemności pamięci, potrzebnej do wykonania programu do czasu trwania programu. Profesor Sędziwy wspominał o tym, że zadaniem matematyków i informatyków jest opracowywanie najszybszych algorytmów — tj. takich, by czas na wykonanie danych obliczeń był jak najkrótszy i jak najlepiej wykorzystywał dany sprzęt. Dodać należy, że ze względu na techniczne możliwości komputerów dowód twierdzenia o czterech barwach nie był możliwy przed 1970 rokiem.

Po drugie, czas jest uwikłany w matematykę w związku z podmiotem poznającym — z matematykami. Nie chodzi tutaj o banalne stwierdzenie, że konkretny matematyk dysponuje w swym życiu ograniczoną ilością czasu. Rzecz w tym, że sposób uprawiania matematyki uwzględnia *implicite* czas. Matematykę uprawiają ludzie, a ich zdolności przyswajania i przetwarzania informacji są ograniczone zarówno ze względu na ilość, jak i na czas potrzebny do ogarnięcia wszystkich danych, dotyczących pewnego problemu. Wśród publikowanych współcześnie dowodów można spotkać i takie, których długość i skomplikowanie sięga już niemal granicy wyznaczonej przez ilość informacji, jaką umysł ludzki może ogarnąć. Przykładem tu może być dwustustronicowy dowód twierdzenia Fermata, przedstawiony przez Wilesa, czy opisany przez G. Bariego Kolatę czterystustronicowy dowód pewnego twierdzenia z homotopii.

W historii matematyki można wskazać odkrycia, które pozwalały reorganizować pracę matematyków, tak aby wyniki ich pracy były dostosowane do możliwości «ludzkich». Pierwsze, które tutaj wymienię, to symboliczny zapis zdań matematycznych. Współcześnie jest oczywiste, że matematyka posługuje się symbolami, lecz do czasów Virte'a wiedza matematyczna zapisywania była pełnymi zdaniami, przez co długość i trudność operowania na wyrażeniach matematycznych była nieporównywalnie większa w stosunku do współczesnych sformułowań.

Wybór odpowiedniej symboliki ma wpływ na skrócenie wypowiedzi oraz często umożliwia wcześniej nieprzewidywalny rozwój danej dziedziny. Przykładem mogą być zmiany sposobu zapisywania potęg. Do XVII wieku używano słownego zapisu potęg. Tak oto pierwsze potęgi miały swoje nazwy własne: druga potęga nazywana była *quadratum*, trzecia *cubus* (zwyczaj używania specjalnych nazw dla tych potęg zachował się w językach potocznych i ściśle związany jest z geometrią). Tam, gdzie było to możliwe, potęgi o wyższych wykładnikach, które były badane w algebrze, zapisywano jako wielokrotności potęgi drugiej lub trzeciej. Potęgom, które nie dawały się jako te iloczyny przedstawić, nadawano nowe nazwy; np. x^5 nazywana była *solidus* przez Ramusa, *primo relatio* przez Pacioliego i Tartaglię, *relatum primum* przez Cardana; x^7 — *bisolidus* lub *secondo relatio*. Co ciekawe, x^{25} nie było przedstawiane jako wielokrotność piątej potęgi, lecz posiadało nazwę ósme *relato* (analogiczną do nazw wcześniejszych potęg o liczbie pierwszej w wykładniku). Poniższa tabelka jest zestawieniem różnych sposobów zapisywania potęg w XV i XVI wieku z zapisem współczesnym.

RAMUS	PACIOLI	TARTAGLIA	CARDANO	XX wiek
l	co	co	pos	x
q	ce	ce	qd^{tum}	x^2
c	cu	cu	cub	x^3
bq	ce.ce	ce ce		x^4
s	p^{0}r^0	pri rel.	R^{m}p^m	x^5
qc	ce.cu	ce cu	cub qd^{ti}	x^6
bs	2^{0}r^0	2 rel.		x^7
tq	ce.ce.ce.			x^8

Zmiana sposobu zapisu potęg, polegająca na jego ujednoliceniu — przez wprowadzenie zapisu z wykładnikiem, będącym kolejnymi liczbami naturalnymi — dała przepis na oznaczanie potęgi o dowolnie dużym wykładniku. Działania na potęgach o tych samych podstawach sprowadzają się do działań prostszych na samych wykładnikach. Konsekwentne sprowadzanie działań, związanych z potęgowaniem, do zapisów, jakie znamy współcześnie, w łatwy sposób zdaje sprawę ze związków wzajemnych tych działań, przenosząc zagadnienia na grunt prostych działań arytmetycznych. Rozszerzenie pojęcia potęgi tak, że w wykładniku najpierw mogły się znaleźć liczby całkowite, potem wymierne, a potem rzeczywiste, prowadziło do rozwoju teorii funkcji wykładniczych i logarytmicznych. Zapis współczesny na pewno uwalnia nas od myślenia i interpretowania potęg w kategoriach geometrycznych i znacznie skraca długość wypowiedzi.

Inny sposób skracania wypowiedzi matematycznych — to organizacja dowodów z lematami. Aby zmiejszyć długość dowodu i nie tracić głównej jego idei, przedstawiamy dowód, wykorzystując pewne tezy, których uzasadnienie podawane jest osobno. Kolejny (niebanalny wobec metodologicznego problemu, związanego z dowodem matematycznym) sposób skracania dowodów — to cytowanie innych twierdzeń. W dowodach korzysta się z twierdzeń wcześniej udowodnionych. Dowód jest uwikłany w całą teorię. Tylko znawca teorii jest w stanie podać lub przeanalizować dowód zaawansowanego twierdzenia. Może to uczynić właśnie dlatego, że poświęcił wiele czasu na poznanie tej teorii, którą rozwijało wielu ludzi. Jeśliby rozpatrywać podmiot poznający, który na początku nie posiadałby żadnej wiedzy matematycznej, to wiele dowodów twierdzeń obecnie uznanych w matematyce byłoby dla niego tak długimi, jak twierdzenie z homotopii opisane wcześniej. Potrzebowałby bardzo wiele czasu, aby je przeanalizować: zbadać poprawność każdego kroku dowodowego, skorygować ewentualne zbędne założenia itp. Tradycyjnie w filozofii matematyki za podmiot poznający uważa się jednego człowieka — a nie grupę ludzi. Zakłada się dla dowodów, że ich twórcą lub odbiorcą jest pojedynczy podmiot. Dlatego nawet próba «uczłowieczenia» dowodu twierdzenia o czterech barwach przez zorganizowanie grupy tysiąca matematyków, która by przeprowadziła zbiorowy dowód, też budziłaby kontrowersje. Chociaż dowody powstają przez współpracę wielu ludzi, przez powoływanie się na dowody twierdzeń innych, przez możliwość korzystania z całego dorobku matematycznego ludzkości, chociaż analizowane są w zespołach matematyków, a sprawdzane i komentowane przez grupy ekspertów, zakłada się jednak, że powinny być dostosowane do możliwości pojedynczego człowieka. Teoretycznie przedstawienie wiedzy matematycznej nie może w sposób konieczny wymagać współpracy z innymi. Praktykę powoływania się na twierdzenia wcześniej udowodnione można przecież porównać do pracy zbiorowej, choć rozłożonej w czasie. Założenie zbiorowego podmiotu poznającego nie zmienia matematyki, natomiast istotnie zmienia filozoficzny opis matematyki, w którym matematyk jest częścią społeczności matematycznej.

Wracając do dowodu z użyciem komputera w odniesieniu do podmiotu poznającego: problem czasu jest o tyle ważny, że dowody są potrzebne nie tylko do stwierdzenia prawdziwości danego zdania matematycznego. Dowody przekonują i rozszerzają rozumienie twierdzenia. «Umieszczają» twierdzenie w teorii, łącząc je z twierdzeniami, z których ono wynika i z tymi, które od niego zależą. Umożliwiają uzyskiwanie wiedzy przez rozumienie, a nie tylko przez wymienienie pewnych własności przedmiotów matematycznych. Są twierdzenia, które mają istotnie różne dowody — dowody te ujawniają różne związki i własności obiektów. Poszukiwania dowodów przyczynają się do rozwoju nowych teorii. Dowody są pomocne w precyzowaniu pojęć matematycznych. Z chwilą utraty możliwości tradycyjnego zapoznania się z dowodami komputerowymi przez matematyków — wymienione funkcje dowodów ulegają zmianom; zmienia się też sama matematyka i sposób jej uprawiania.

JACEK URBANIEC:

Profesor Lasota powiedział, że matematyka ma wielkie znaczenie filozoficzne. To prawda. Natomiast kiedy się przysłuchuję niektórym rozważaniom filozofów, to mam wrażenie, że ci ostatni zbyt rzadko odwołują się do tego uniwersum, które jest badane w matematyce. Szkoda, gdyż to dopiero byłoby fascynujące! Wiele rozważań, pretendujących do uniwersalności i pasujących do przykładów z życia codziennego w konfrontacji ze światem matematyki bardzo szybko by się załamało. Od wieków uważano, że nieskończoność jest pojęciem negatywnym — i nic więcej się o niej nie da powiedzieć. Dopiero dzięki badaniom matematyków okazało się, że to nieprawda: że mamy nieskończoność przeliczalną, nieprzeliczalną i mnóstwo innych. Kłopot w tym, że jeśli chcemy we właściwym świetle przedstawić filozoficzne znaczenie ważnych odkryć matematycznych, na ogół wracamy do tego, od czego dzięki matematyce odeszliśmy: do różnych intuicji zdroworozsądkowych. Skutek jest taki, że po przełożeniu na język naturalny całe bogactwo semantyczne matematyki znika, a wnioski z niej wypływające mogą wydawać się niektórym banalne.

ANDRZEJ PELCZAR:

Matematyka jest nauką dedukcyjną. Ale jej rozwój oparty jest na postępowaniu indukcyjnym. Jeśli mamy jakiś porządny system aksjomatyczny, to kolejne twierdzenia w tym systemie nie powstają w ten sposób, że patrzy się na wszystkie możliwe, wynikające z aksjomatów (lub innych, wcześniej udowodnionych, twierdzeń) zdania. Poszukując hipotez, a więc zdań, które mogłyby być twierdzeniami, kierujemy się różnymi motywacjami «pozaformalnymi». Mówimy o intuicji, rozumujemy posługując się analogiami. Z oczywistych powodów odwołujemy się do intuicji geometrycznej i fizycznej, jeśli tylko badamy teorie lub ich fragmenty, które służą (lub mogą służyć) jako pewne modele dla zagadnień fizycznych. Intuicje matematyczne — zwłaszcza na wyższych poziomach abstrakcji — nie biorą się już ze skojarzeń z tzw. światem zewnętrznym i «rzeczywistością fizyczną». Mówimy o analogiach między twierdzeniami, o uogólnieniach znanych twierdzeń, i nie odwołujemy się najczęściej do «świata zewnętrznego», w którym zresztą — być może — znajdą się zastosowania dla tych twierdzeń. W ten sposób dochodzimy do propozycji zdań, które są «kandydatami na twierdzenia». I to jest — powtarzam — procedura indukcyjna. Natomiast sprawdzenie, czy to są naprawdę twierdzenia, a więc ewentualne dowody, musimy oprzeć na precyzyjnym rozumowaniu formalnym. W tym momencie rozumujemy już dedukcyjnie.

Na marginesie dodam, że mówiąc o zastosowaniach (ewentualnych) twierdzeń matematycznych, zawsze mówią o — właśnie! — zastosowaniach matematyki, względnie o stosowaniu matematyki, a nie o «matematyce stosowanej» (przeciwstawianej «matematyce czystej»). Rozwinięcie tego wątku przekracza jednak ramy tej dyskusji.

LESZEK M. SOKOŁOWSKI:

Właściwości, które tu przypisujemy matematyce, są trudno dowodliwe, są raczej treścią wiary poszczególnych matematyków, niż twierdzeniami metamatematycznymi. Dlatego też raz po raz słyszymy zwrot „mój punkt widzenia". Przypomniał mi się zatem pogląd Davida Hilberta, który lubił powtarzać: każdy człowiek ma swój nieprzekraczalny horyzont myślowy. W pewnych sytacjach u niektórych ludzi horyzont ten zawęża się i kurczy aż do punktu. Wówczas człowiek ten mówi: to jest mój punkt widzenia. Aby nie poprzestać na warstwie anegdotycznej, przejdę do problemu, z którym wielokrotnie się stykałem. Filozofowie przywiązują na ogół dużą wagę do twierdzenia Gödla. Jakie jest znaczenie tego twierdzenia z punktu widzenia samych matematyków? Chodzi mi tu nie o podstawy matematyki i sam program Hilberta, lecz o matematykę właściwą — geometrię, analizę — jak ona odczuła to twierdzenie?

ROMAN DUDA:

Mój punkt widzenia w tej sprawie jet następujący. Kiedy Gödel sformułował swoje twierdzenie, odwiedził Królewiec. Wtedy w Królewcu był także Hilbert. Panowie się jednak nie spotkali. Hilberta te rzeczy nie interesowały i na twórczość Hilberta praca Gödla nie wpłynęła w najmniejszym stopniu.

W moim przekonaniu twierdzenie Gödla — pomijając podstawy — nie wpłynęło na rozwój matematyki.

RYSZARD WÓJCICKI:

Jedna z tez Profesora Lasoty głosi, że matematyka jest uniwersalnym narzędziem opisu świata. To prawda. Nie zapominajmy jednak o tym, że oprócz opisywania świata jesteśmy zdolni świat tworzyć. Świat naprawdę nie jest rzeczą daną. Człowiek świat buduje. Tezę Profesora Lasoty uzupełniłbym więc tak: matematyka oprócz tego, że jest narzędziem opisu świata, jest również narzędziem projektowania świata.

Jeśli chodzi o związki między filozofią a matematyką, to chciałbym powiedzieć, że pewna liczba rozważań matematycznych ma niewątpliwie czysto filozoficzne inspiracje.

Przed laty, na przykład, Leśniewski — pracując w katedrze filozofii matematyki w Uniwersytecie Warszawskim — usiłował stworzyć system matematyczny, który byłby oparty na zasadach nominalistycznych i byłby konkurencyjny w stosunku do teorii mnogości. Usiłowania te zakończyły się — moim zdaniem — niepowodzeniem, ale przecież nie wszystkie ścieżki, które kończą się niepowodzeniem, są ścieżkami, których nie warto było przechodzić.

Innym przykładem bezpośredniego wływu filozofii na matematykę są te wszystkie poszukiwania, które są próbą ograniczenia dowodów do metod, które są nazywane „metodami konstruktywnymi". To wszystko zaczęło się od bardzo bardzo niejasnych koncepcji filozoficznych Brouwera i rozwinęło się w pewne logiki nieklasyczne. Sam niechętnie odnoszę się do wszelkich pomysłów filozoficznych, które polegają na tworzeniu jakiejś nowej logiki. Wietrzę w tym próbę obejścia tych trudności, które powinny być usunięte rzetelną pracą, a więc «tradycyjnymi» sposobami. Z drugiej strony próby te dostarczyły bogatego materiału matematycznego; pewne rzeczy w tym zakresie były robione przez wybitnych matematyków — np. przez Kołmogorowa i Markowa. W ten sposób czysto filozoficzna inspiracja, która kazała matematykom zastanawiać się nad tym, jak się pewnych rzeczy dowodzi, dała wyniki, nad którymi nie można przejść do porządku dziennego.

Jedną z takich prób, całkowicie skrajną, była także próba zbudowania matematyki bez pojęcia nieskończoności.

Matematyka — bez względu na to, czym się to kończy — musi tego rodzaju problematykę podejmować, dlatego że to jest badanie granic możliwości pewnych technik — i pewnych zastosowań.

Inaczej niż Profesor Duda oceniam ważność twierdzenia Gödla. Myślę, że badania Gödla zaowocowały rozwojem takich dyscyplin matematycznych, jak teoria modeli, a ta ostatnia wpłynęła zasadniczo na rozwój teorii rozmaitości i algebr abstrakcyjnych. Sparafrazowałbym to, co Profesor Lasota powiedział o stosunku probabilistyki do matematyki: odmawianie ważności twierdzeniu Gödla jest być może wyrazem niechęci matematyków do logiki matematycznej.

W Polsce taka niechęć jest szczególnie nie na miejscu, bo mamy znakomitą tradycję Szkoły Logicznej, z takimi wielkimi nazwiskami, jak: Łukasiewicz, Tarski, Mostowski, Łoś, Grzegorczyk. Można oczywiście zawsze zapytać: a co oni wszyscy dali matematyce? Wydaje mi się, że niezależnie od tego, jak ten czy inny wynik wpłynął na rozwój matematyki, to logika matematyczna — a szerzej podstawy matematyki — dały matematykom rzecz o istotnym znaczeniu: zrozumienie istoty metod matematycznych, sposobów budowania matematyki — ogólniej: zrozumienie struktury matematyki.

Wszelkiego rodzaju niechęci do jakiegokolwiek działu matematyki są, moim zdaniem, zawsze nieusprawiedliwione, dlatego że matematyka jest dyscypliną tak bogatą, obejmującą tak rozmaite zagadnienia, że nie sądzę, aby możliwe było objęcie tej ogromnej różnorodności przez jednego matematyka.

ANDRZEJ PELCZAR:

W sprawie wzajemnych «niechęci»: chciałbym odwołać się do prostej analogii. Kiedy posługujemy się jakimś urządzeniem, to nie interesuje nas, co jest «w środku»: zadowalamy się tym, że ono «działa». Podobnie jest z logiką matematyczną i innymi działami matematyki. Korzystamy z ich wyników, ale nie interesujemy się, co się za nimi «głębiej» kryje. Ten brak zainteresowania nie musi być wcale objawem niechęci.

ROMAN DUDA:

Jeszcze chciałbym się krótko odnieść do tego, co mówił Profesor Wójcicki o konstruktywizmie. Brouwer, który był twórcą konstruktywizmu, kierował się w tym przesłankami filozoficznymi, ale był także twórczym matematykiem — miał ważne osiągnięcia np. w zakresie topologii. Otóż jako twórczy matematyk, nigdy nie stosował zasad konstruktywistycznych, które głosił. Być może była to swego rodzaju schizofrenia. Prawdą jest, że konstruktywizm pozostał absolutnie na uboczu. Nawet pojawienie się komputerów, które potrzebują przecież metod algorytmicznych (konstruktywistycznych) nie zmienił tej sytuacji. Jeśli weźmiemy do ręki *Mathematical Reviews*, to prace, które się zaliczają — lub mogą być zaliczane — do konstruktywistycznych, stanowią niewielki fragmencik recenzowanych tam publikacji.

Profesor Wójcicki upomina się o Warszawską Szkołę Logiczną. To była istotnie wielka szkoła. Wywarła też ona pewien wpływ na rozwój matematyki — ale trochę inny. Na przykład w latach dwudziestych jednym z wielkich problemów był pewnik wyboru. Filozofowie zaproponowali podejście «filozofujące»: co to znaczy „wybór", „pewnik"? Natomiast Sierpiński zaproponował inne: zostawmy filozofom spory o filozoficzny charakter tego pewnika, a my zajmijmy się jego konsekwencjami matematycznymi i dopiero po ich rozpoznaniu zajmiemy stanowisko wobec tego, czy on się nam przyda, czy nie. Ten pogląd Sierpińskiego dzisiaj jest uznawany za decydujący dla tego rodzaju badań. Pośrednio wpłynął on także na rozwój całej matematyki. Jeśli się próbuje ocenić dorobek Polskiej Szkoły Matematycznej lat międzywojennych, to się akcentuje tę cechę charakterystyczną owego dorobku, która polega na uznaniu metod nieefektywnych w matematyce. I powiada się, że ten punkt widzenia, wcale wówczas nie powszechny, został później przyjęty przez cały świat matematyczny.

Wydaje mi się, że dzisiaj nastąpiła pewnego rodzaju izolacja podstaw matematyki od reszty matematyki. Podstawy matematyki — związane z logiką — zamykają się trochę w swoim świecie: widać to choćby, jeśli się porówna liczbę wzajemnych cytowań. Natomiast w tej «reszcie» — związki między algebrą, analizą, geometrią, probabilistyką są bardzo żywe. Oczywiście trudno powiedzieć, co będzie dalej.

JAN MALCZAK:

Ważnym problemem z pogranicza matematyki i filozofii jest zagadnienie intuicji. Czy istnieje tzw. intuicja matematyczna, na czym ona polega i jaka jest jej rzeczywista rola?

JACEK URBANIEC:

Pytanie o intuicję jest bardzo ważne. Jeśli ktoś jest platonikiem na terenie matematyki — tzn. uważa, że prawdy matematyczne istnieją niezależnie od naszej wiedzy, niezależnie od czasu i przestrzeni — to zawsze rodzi się problem, jak te prawdy poznajemy. A większość matematyków — to właśnie platonicy.

ANDRZEJ LASOTA:

Jako początkujący matematyk znalazłem się szczęśliwie w zakładzie profesora Tadeusza Ważewskiego między wspaniałymi ludźmi. Był tam m.in. profesor Stanisław Łojasiewicz, profesor Włodzimierz Mlak, profesor Zdzisław Opial. Znalazła się tam także Pani Danuta Gierulanka, która w zasadzie nie była matematykiem. A znalazła się, ponieważ rozwiązano katedrę filozofii — nie odpowiadającą ideologicznie panującej wówczas strukturze politycznej. Prowadziliśmy z jej udziałem bardzo ostre dyskusje filozoficzne. Na tle jednej z takich dyskusji uświadomiłem sobie jedną z cech intuicji. To zdarzenie jest ilustracją prawdy, że nie ma tego złego, co by choć trochę na dobre nie wyszło.

Inaczej niż Pani Gierulanka, nie należę do ludzi, którzu uważają, że myślenie musi się odbywać koniecznie przy pomocy słów. Należę do ludzi, którzy uważają, że do pewnych rzeczy dochodzi się drogą wyobraźni pozasłownej. W jednej dziedzinie miałem ostatnio trochę pomysłów — mianowicie w badaniach stabilności procesów, czy też dokładniej operatorów, Markowa — i wszystkie one wyrosły z intuicji pozasłownej. Nigdy sobie niczego nie formułowałem słowami: po prostu wyobrażałem sobie, jak się taki proces toczy, i widziałem, jak to wszystko może działać.

Podam przykład pozasłownego rozumowania, który był kiedyś moim udziałem. Duży dosyć przedmiot wpadł mi za siatkę, przez którą nie mogłem przejść, a zależało mi na odzyskaniu go. Dostałem się do niego palcami i podniosłem go do następnej wyższej dziurki w siatce. Ponieważ na szczęście siatka nie była wyższa od zasięgu moich rąk, więc w ten sposób podprowadziłem go aż do góry. Wyobraziłem to sobie bez żadnych słów — i dokonałem rozwiązania pewnego problemu.

Przypuszczam, że jednym z narzędzi intuicji jest wyobraźnia. Wyobraźnia taka przejawia się rozmaicie w rozmaitych dziedzinach. Ponieważ współpracowałem nieraz z inżynierami, byłem zawsze zdumiony, jak niezwykła jest ich intuicja — wyobraźnia — mechaniczna. Jest jeszcze drugi czynnik w intuicji: doświadczenie. Ktoś powiedział, że intuicja jest to po prostu długotrwałe doświadczenie. Moim zdaniem — to za mało. Ale uważam, że wyobraźnia plus długotrwałe doświadczenie — to już jest *prawie* intuicja.

Nawiasem mówiąc, nie widziałem niczego smutniejszego niż amerykańskie szkoły dla pisarzy. Można taką szkołę skończyć — a i tak się świetnym pisarzem nie będzie. Żadna intuicja — także intuicja literacka — na wyobraźni i doświadczeniu się nie kończy.

JACEK JADACKI:

Profesor Lasota odwołał się do aforyzmu Steinhausa. Filozofowie są nie gorsi — i swoich aforystyków też mają. Zacytuję pewien aforyzm Elzenberga — na temat aforyzmów: *W ogromnej większości wypadków efektowna bywa myśl tylko dlatego, że nie jest przemyślana do końca.*

Trzy zasadnicze — i zresztą związane ze sobą ważnymi związkami — tezy Profesora Lasoty, dotyczące relacji między filozofią a matematyką, mają charakter aforyzmów. Pozostałe tezy zostały później obudowane wyjaśnieniami, a te trzy — nie. Chodzi o tezę pierwszą, że matematyka jest strukturą naszego świata; o tezę czwartą, że odkrycia matematyczne mają istotne znaczenie dla filozofii; wreszcie o tezę piątą, że nie każde zagadnienie można rozwiązać przy pomocy matematyki. Związki między tymi tezami widać wyraźniej, jeśli się je trochę przeformułuje i powie tak: że problemy matematyczne — to są problemy dotyczące pewnych aspektów rzeczywistości, że niektóre z tych aspektów są istotne; ale są aspekty, których matematyka nie może uchwycić.

Jeśli chodzi zwłaszcza o ostatnią tezę, to trzeba bardzo ostrożnie wyanalizować, o co tu chodzi. Zwróćmy uwagę, że w przeciwieństwie do dwóch pierwszych, dotyczy ona możliwości.