*Filozofia Nauki*
*Rok XXIII, 2015, Nr 4(92)*

Krzysztof Wójtowicz

# Inspiracje empirystyczne w filozofii matematyki
## Część II*

Artykuł stanowi drugą część studium poświęconego wątkom empirystycznym w filozofii matematyki. W pierwszej części omówione zostały poglądy Milla, Berkeleya i Carnapa (Wójtowicz 2015). Tu przedstawiam koncepcje Quine'a i Putnama oraz podsumowuję całość rozważań.

### 1. QUINE: EMPIRYZM + NATURALIZM = REALIZM

Stanowisko Quine'a stanowi ciekawy przykład ujęcia, które łączy w sobie empiryzm z realizmem matematycznym. Wydaje się to nieco zaskakujące, ponieważ realizm matematyczny zwykło się kojarzyć z platonizmem. Najbardziej znanym dwudziestowiecznym przedstawicielem takiego realizmu był Gödel. W myśl tego poglądu nasze poznanie prawd matematycznych jest możliwe dzięki zdolności rozumu do ich ujmowania i przeprowadzania wnioskowań. We współczesnej filozofii matematyki przeważa jednak i znacznie szerzej jest omawiane stanowisko realistyczne Quine'a[1]. Duża część prac z zakresu ontologii matematyki, zwłaszcza *explicite* dotyczących sporu między realizmem a antyrealizmem, odwołuje się bezpośrednio lub pośrednio do koncepcji Quine'a, traktując jego argumentację na rzecz realizmu matematycznego jako godną uwagi (a niekiedy jako jedyny wart uwzględnienia argument realistyczny).

* Projekt został sfinansowany ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych na podstawie decyzji nr DEC-2011/01/B/HS1/04023.

[1] Przy czym obserwujemy renesans zainteresowania myślą Gödla: ukazują się kolejne tomy dzieł zebranych, pojawia się coraz więcej prac dotyczących Gödlowskiej koncepcji matematyki (w szczególności akcentujących wątki fenomenologiczne, por. np. wymienione w bibliografii prace Tieszena).

Można powiedzieć, że rozumowanie Quine'a wyznaczyło styl argumentacji i standardy współczesnego sporu o realizm. Jego omówienia nie może więc zabraknąć w pracy poświęconej empiryzmowi w filozofii matematyki[2].

Charakterystyczne (i zaskakujące) jest to, że do realizmu w odniesieniu do bytów matematycznych Quine dochodzi, obierając za punkt wyjścia empiryzm i naturalizm, bez odwoływania się — w odróżnieniu od Gödla — do intuicji matematycznej, poczucia oczywistości prawd matematycznych. Należy zauważyć, że Quine nie podaje żadnej odrębnej, empirystycznej epistemologii matematyki. Nie zajmuje się bowiem w zasadzie samym procesem nabywania przekonań matematycznych, poczuciem oczywistości, problemem uzasadniania aksjomatów czy kwestią aktów intelektualnych będących udziałem matematyków. Interesuje go natomiast uprawomocnienie tezy realizmu matematycznego (w pewnej jej ograniczonej wersji) za pomocą analizy struktury nauk empirycznych. Ta empirystyczna koncepcja w naturalny sposób prowadzi do realizmu matematycznego.

Zwolennicy realizmu platońskiego postulują, co zrozumiałe, istnienie intuicji matematycznej jako zdolności umysłu do ujmowania prawd matematycznych w szczególnego rodzaju aktach umysłowych. Z tego punktu widzenia rozważania filozoficzne można uznać za pierwotne w stosunku do analiz odwołujących się do wyników nauk empirycznych. Quine odrzuca jednak stanowisko fundacjonistyczne, przypisujące filozofii uprzywilejowany i uprzedni wobec nauki status poznawczy. Filozofia korzysta z wyników nauk szczegółowych: jej zadaniem jest raczej teoretyczna analiza i włączenie wyników nauk szczegółowych w pewien całościowy obraz rzeczywistości, a nie szukanie dla nich epistemologicznej podstawy[3]. Pod tym względem Quine zajmuje stanowisko podobne do neopozytywistycznego, ale dalsze analizy (w tym analizy logiczne) prowadzą go do wniosków diametralnie odmiennych od tych, które formułowali logiczni pozytywiści.

Punktem wyjścia rozważań Quine'a i podstawą jego rozumowania jest spostrzeżenie, że matematyka stanowi nieusuwalny składnik teorii naukowych[4]. Argument na rzecz realizmu matematycznego sformułowany przez Quine'a nosi w literaturze nazwę „argumentu z niezbędności” (*indispensability argument*): nieodzowność matematyki w naukach empirycznych ma nas zobowiązywać do jej realistycznej interpretacji, przynajmniej w takim zakresie, w jakim wchodzi ona w skład matematycznego instrumentarium nauk przyrodniczych. W tak lapidarnym sformułowaniu argument ten trudno uznać za przekonujący, wynika on jednak w naturalny sposób z całości koncepcji Quine'a — zasadza się na szeregu szczegółowych założeń i rozstrzygnięć. Można tu wskazać następujące przesłanki:

---

[2] Do koncepcji Quine'a nawiązują (często polemicznie) tacy autorzy, jak Field (1980), Hellman (1989), Chihara (1990), Maddy (1990), Shapiro (1997), Burgess i Rosen (1997), Balaguer (1998).

[3] „Moje metodologiczne rozważania […] należy także uważać za naturalistyczne; nie stanowią one części filozofii pierwszej, poprzedzającej naukę. Ich tłem jest […] świat fizyczny widziany w perspektywie globalnej nauki” (Quine 1981: 49).

[4] Chodzi tu głównie o fizykę — i do niej odnosić się będą rozważania w tym paragrafie.

1. Odrzucenie dwóch „dogmatów empiryzmu".
2. Przyjęcie tezy holizmu (jednostką sensu empirycznego jest teoria, a nie pojedyncze zdanie teorii).
3. Uwzględnienie w analizach mechanizmu reifikacji, obecnego zarówno przy tworzeniu zdroworozsądkowego obrazu świata, jak i przy budowaniu teorii naukowych.
4. Przyjęcie tezy realizmu naukowego (czyli w szczególności „poważne potraktowanie zobowiązań ontologicznych teorii").
5. Sformułowanie odpowiedniego kryterium istnienia, które pozwala na identyfikację zobowiązań ontologicznych danej teorii (nie jest to bowiem jasne w punkcie wyjścia: w naiwnie pojmowanej ontologii mamy zazwyczaj spory bałagan pojęciowy).

Omówię teraz te założenia, natomiast końcowy fragment rozdziału na temat Quine'a poświęcę pięciu szczegółowym zagadnieniom wyróżnionym na początku studium.

**1) Odrzucenie dwóch dogmatów empiryzmu.** Głośny tekst Quine'a *Dwa dogmaty empiryzmu* poświęcony jest krytyce założeń, na których opiera się neopozytywistyczna wizja nauki i filozofii. Owe założenia (czyli dogmaty empiryzmu) Quine formułuje następująco:

(1) Między zdaniami analitycznymi (których prawdziwość wynika wprost z postulatów języka i jest niezależna od faktów) a syntetycznymi (których prawdziwość uzależniona jest od stanu faktycznego) istnieje rozdział o fundamentalnym charakterze.

(2) Aby zdanie można było uznać za sensowne, musi być równoważne (czyli inaczej: redukowalne do) pewnej konstrukcji logicznej, w której występują jedynie terminy odnoszące się bezpośrednio do danych doświadczenia (Quine 1953, 1969b).

Podział zdań na analityczne i syntetyczne jest jednak zdaniem Quine'a bezpodstawny:

> Jesteśmy skłonni zakładać ogólnie, że prawdziwość zdań daje się rozłożyć na komponent językowy i komponent faktualny. Przy tym założeniu wydaje się racjonalne sądzić, że w przypadku pewnych zdań ów komponent faktualny powinien być zerowy: byłyby to właśnie zdania analityczne. Lecz przy całej apriorycznej racjonalności tego pomysłu linia graniczna pomiędzy zdaniami analitycznymi i syntetycznymi po prostu nie została poprowadzona. Przekonanie, że rozróżnienie to jest w ogóle wykonalne jest nieempirycznym dogmatem empirystów, ich metafizycznym artykułem wiary (Quine 1969b: 57-58)[5].

[5] W innych miejscach pisze: „Odrzucenie przeze mnie pojęcia analityczności motywowane jest tym, że nie da się przeprowadzić żadnej granicy między tym, co ma związek wyłącznie z rozumieniem zdań danego języka, i tym, co cała społeczność widzi na własne oczy. Wątpię, by można było w obiektywny sposób odróżnić znaczenie od takiej ubocznej informacji, która jest znana całej wspólnocie językowej" (Quine 1986b: 121). „Wzięta w całości nauka pozostaje w podwójnej zależności

To właśnie przypisanie pewnym wypowiedziom statusu konwencji pozbawionych faktualnej treści stanowi fundament neopozytywistycznego ujęcia matematyki jako składni języka nauki (czy też — by posłużyć się porównaniem Hempla — jako „teoretycznej sokowirówki" służącej jedynie do wyciągania nowych wniosków). W myśl logicznego empiryzmu prawdy matematyczne stanowią tylko ramy naszej działalności poznawczej[6]. Jeśli jednak uznamy krytykę Quine'a za zasadną, to pojęcie zdania analitycznego stanie się „nielegalne", a w każdym razie na tyle niejasne, że nie będzie mogło stanowić podstawy dla wyjaśnienia statusu matematyki.

Quine odrzuca również tzw. empirystyczny dogmat redukcjonizmu, czyli:

> przekonanie, że każdemu zdaniu, czy też każdemu zdaniu syntetycznemu, odpowiada jednoznacznie określony zbiór możliwych zdarzeń zmysłowych, z których każde realizując się wzmaga prawdopodobieństwo tego zdania, a także określony zbiór możliwych danych zmysłowych, których realizacja obniża to prawdopodobieństwo (Quine 1969b: 63).

Dogmat ten leży u podstaw przekonania, że poszczególne zdania w teorii naukowej możemy wydzielić z teorii, a następnie weryfikować je lub obalać. Jednak zdaniem Quine'a tak nie jest — należy przyjąć holizm.

**2) Holizm.** Skoro „nasze twierdzenia o świecie zewnętrznym stają przed trybunałem doświadczenia zmysłowego nie indywidualnie, lecz zbiorowo" (Quine 1969b: 63), to jednostką sensu empirycznego jest cała teoria. Znaczenia są nadawane terminom w obrębie całej teorii, włącznie z instrumentarium matematycznym i logicznym, a wszystkim zdaniom tej teorii przypisuje się podobny status. Nie można zatem twierdzić, że weryfikacja (empiryczna) dotyczy tylko wybranych zdań danej teorii.

Widać tu wyraźną różnicę między Quine'em a Carnapem. Carnap odwołuje się do podziału na schemat i treść teorii, a sam schemat jest według niego pozbawiony sensu empirycznego, jego przyjęcie jest w ogóle wstępnym warunkiem tworzenia teorii naukowych. Quine odrzuca to rozróżnienie i przyjmuje wizję holistyczną: teoria jest pewną całością i bezpodstawne jest wyróżnianie w niej składnika konwencjonalnego i faktualnego. Według Quine'a nasze przekonania o świecie można porównać do sieci, a zdania teorii — do jej węzłów. Dotyczy to zarówno zdań obserwacyjnych, jak i zdań, w których pojawiają się terminy teoretyczne i matematyczne:

> Całokształt naszej tzw. wiedzy czy też przekonań, od najbardziej przypadkowych prawd geografii i historii aż po najgłębsze prawa fizyki atomistycznej, a nawet czystej matematyki i logiki formalnej, jest tworem człowieka i styka się z doświadczeniem tylko wzdłuż swoich krawędzi. Mówiąc inaczej, nauka jako całość podobna jest do pola siły, którego warunkami brzegowymi jest doświadczenie. Konflikt z doświadczeniem na brzegach pola powoduje odpowiednie przystosowania w jego wnętrzu. […] Żadne poszczególne świadectwo doświadczenia nie jest zwią-

— od języka i od doświadczenia; lecz dualizm ten nie daje się zasadnie odwzorować na poszczególnych twierdzeniach nauki" (Quine 1969b: 64). Nie da się więc ustalić linii demarkacyjnej.

[6] Balaguer (1998), argumentując na rzecz stanowiska antyrealistycznego, porównuje matematykę do płótna, na którym namalowany jest obraz. Płótno jest niezbędne — ale nie mówi nic o treści obrazu.

> zanie z jakimś określonym zdaniem z wnętrza pola; związek ten ma co najwyżej charakter pośredni, za sprawą równowagi pola jako całości (Quine 1969b: 65)[7].

Carnap mówi o zdaniach matematyki jako o prawdach wewnątrzsystemowych, które przyjmujemy jako element konwencjonalny. Stanowisko Quine'a jest inne: jeśli przyjmujemy pewne postulaty w ramach danej teorii, to powinniśmy traktować je poważnie — w szczególności należy traktować serio zdania egzystencjalne. Dotyczy to również zdań matematycznych. Nie możemy więc twierdzić, że ich prawdziwość ma czysto konwencjonalny charakter i że pozbawione są pozajęzykowej interpretacji.

**3) Mechanizm reifikacji.** Quine zauważa, że już na poziomie przekonań zdroworozsądkowych mamy do czynienia z mechanizmem postulowania przedmiotów. Nie ulega przecież wątpliwości, że w naszym potocznym obrazie świata uwzględniamy zwykłe przedmioty fizyczne: uznajemy, że istnieją obiekty takie jak stoły czy krzesła. Zdaniem Quine'a w grę wchodzi pragmatycznie motywowany mechanizm reifikacji (czyli postulowania przedmiotów pewnego typu): ma on stworzyć taki obraz świata, który pozwoli nam sprawnie działać[8]. Wiara w to, że nasze wrażenia zmysłowe pochodzą od stołów i krzeseł, niewątpliwie nam to ułatwia, i dlatego przyjmujemy fizykalistyczny, a nie fenomenalistyczny aparat pojęciowy[9].

Zdaniem Quine'a wiedza naukowa stanowi przedłużenie wiedzy potocznej, choć oczywiście gromadzi się ją w znacznie bardziej systematyczny sposób, podlega o wiele bardziej skrupulatnym i zaplanowanym sprawdzianom itd. Nic dziwnego więc, że mechanizmy reifikacji obecne przy tworzeniu wiedzy zdroworozsądkowej odnajdujemy (w formie uteoretyzowanej i poddanej bardziej rygorystycznym kryteriom) także w nauce. Zasadniczy mechanizm jest jednak taki sam: wprowadzamy założenia egzystencjalne dotyczące istnienia przedmiotów pewnego typu (np. elektronów), aby móc sprawnie i skutecznie uporządkować dane doświadczenia, a w szczególności sformułować odpowiednie hipotezy wyjaśniające i prawa umożliwiające dokonywanie przewidywań. Krótko mówiąc, rozbudowujemy naszą ontologię, aby uprościć opis świata. Należy podkreślić, że ten zabieg odbywa się na *każdym* etapie tworzenia naszej wiedzy. Zawsze bowiem — w ostatecznym rozrachunku — mamy do czynienia z problemem zbudowania teorii harmonizującej z naszym strumieniem wrażeń.

[7] Pozostając w tej metaforyzującej stylistyce, można podać następującą ilustrację: kształt błonki mydlanej rozpiętej na zamkniętej pętli zależy oczywiście od kształtu pętli i zmienia się wraz ze zmianą kształtu pętli. Nie można jednak powiedzieć, że to pewien konkretny fragment owej pętli jest w pełni odpowiedzialny za kształt określonego fragmentu błonki mydlanej.

[8] Najczęściej zresztą nie uświadamiamy sobie w pełni tego faktu, jesteśmy bowiem skłonni do przyjmowania tezy naiwnego realizmu jako niebudzącej wątpliwości.

[9] „Łącząc oddzielne doznania zmysłowe i traktując je jako percepcję jednego przedmiotu, ujmujemy bogactwo naszych doznań w prostym i operatywnym schemacie pojęciowym. Przyporządkowywanie danych zmysłowych przedmiotom zewnętrznym jest […] podyktowane zasadą prostoty: wcześniejsze i późniejsze wrażenie okrągłości łączymy z tą samą monetą lub z dwiema różnymi monetami, kierując się postulatem maksymalnej prostoty naszego całościowego obrazu świata" (Quine 1969a: 31).

**4) Realizm naukowy — poważne potraktowanie ontologii.** Mechanizmy reifikacji można by interpretować w duchu neopozytywistycznego instrumentalizmu — jako wprowadzanie użytecznego systemu pojęć, któremu nie przypisujemy żadnej ontologicznej wagi (w duchu Carnapa nie mówilibyśmy wtedy raczej o reifikacji, lecz o wprowadzaniu pewnych terminów). Quine odrzuca taki punkt widzenia, domagając się „poważnego traktowania" przyjmowanych przez nas hipotez naukowych. Zgadza się oczywiście z tym, że przedmioty w każdej teorii są *postulowane*, nie znaczy to jednak, że powinniśmy uważać je za mniej rzeczywiste (czy wręcz fikcyjne).

W kontekście dyskusji nad ontologicznym statusem matematyki szczególnie ważne jest to, że zgodnie ze stanowiskiem Quine'a kryteria istnienia przedmiotów dalece wykraczają poza obserwowalność. W nauce posługujemy się np. eksplanacyjnym kryterium istnienia[10], które *de facto* obecne jest już nawet na etapie zdroworozsądkowym (choć na ogół nie zdajemy sobie z tego sprawy[11]).

Również mechanizm reifikacji opiera się na pewnej wersji tego kryterium:

> Przedmioty fizyczne są pojęciowo wnoszone do sytuacji jako wygodne ogniwa pośredniczące — nie przez definiowanie ich w terminach doświadczenia, lecz jako nieredukowalne byty postulowane (Quine 1969b: 67)[12].

Dotyczy to zarówno przedmiotów obserwowalnych (stoły, kamienie), teoretycznych (geny, elektrony), jak i przedmiotów matematycznych:

> Wszystko to, czemu przypisujemy istnienie, jest przedmiotem postulowanym z punktu widzenia opisu procesu budowania teorii, a zarazem jest rzeczywiste z punktu widzenia samej tworzonej teorii. Nie powinniśmy również traktować punktu widzenia teorii jako gry pozorów, zawsze musimy bowiem przyjmować perspektywę tej czy innej teorii — najlepszej, na jaką w danej chwili potrafimy się powołać (Quine 1999: 37).

[10] Przypomnijmy tu — w pewnym uproszczeniu — schemat eksplanacyjnego kryterium istnienia: (1) obserwujemy pewne zjawiska, których nie jesteśmy w stanie wyjaśnić w kategoriach czysto obserwacyjnych; (2) potrafimy natomiast sformułować wyjaśnienia, które wykorzystują pojęcia teoretyczne (gen, elektron itp.); (3) uznajemy, że powinniśmy konsekwentnie przyjąć istnienie przedmiotów, do których odwołują się terminy teoretyczne. Instrumentalista nie zgodzi się oczywiście na ostatni punkt: konieczność użycia pewnego typu terminów nie oznacza jego zdaniem, że musimy przypisać im interpretację.

[11] Kiedy słyszymy dźwięk, to zazwyczaj uznajemy, że w okolicy musi znajdować się jego źródło, nawet jeśli nie jesteśmy w stanie go zidentyfikować.

[12] W innym miejscu pisze zaś: „Mnożenie bytów może stanowić istotny wkład do teorii. Nie zawsze stanowi taki wkład. Samo w sobie mnożenie bytów należy uznać za niepożądane, zgodnie z brzytwą Ockhama; musi się ono opłacać. Rozszerzaj uniwersum o klasy i inne dodatki, jeśli dostarczy ci to prostszej, gładszej i bardziej ogólnej teorii; w przeciwnym wypadku nie czyń tego. Wszak chodzi o prostotę, a ekonomia ontologiczna jest jednym z jej aspektów, wymagającym uwzględnienia obok innych. Wolno jednak sądzić, że pewne rozszerzenia uniwersum przyczyniają się w sumie co uproszczenia naszego systemu świata" (Quine 1986a: 86). Widać więc, że Quine podkreśla pragmatyczne motywy wyboru takiej, a nie innej ontologii — motywy, które zawsze wpływają na decyzje dotyczące wyboru i modyfikacji teorii naukowych.

Pytanie o istnienie obiektów matematycznych jest więc pytaniem tego samego typu co pytanie o istnienie kamieni czy elektronów. Ostatecznie chodzi bowiem o to, w jaki sposób konstruujemy teorie, które mają wyjaśnić dane empiryczne, i do uznania jakich tez egzystencjalnych zobowiązujemy się w trakcie tworzenia tych teorii. Natomiast nasza skłonność do odmiennego postrzegania pytań o istnienie wynika z uwarunkowań o charakterze psychologicznym: łatwiej nam uwierzyć w istnienie kamieni niż elektronów, a w istnienie tych ostatnich łatwiej niż w istnienie przestrzeni Hilberta[13]. Zdania matematyczne nie różnią się jednak co do zasady od zdań mówiących o przedmiotach fizycznych. Wszystkie one stanowią fragment przyjmowanej całościowo sieci przekonań. Jednostką sensu empirycznego jest cała teoria i wszystkie jej zdania mają taki sam status poznawczy[14].

**5) Koncepcja i kryterium istnienia.** Potocznie nierzadko używamy terminu „istnieć”, dodając do niego modyfikujący jego znaczenie zwrot „w sensie”: mówimy na przykład, że krzesło istnieje w sensie materialnym, myśli w sensie intencjonalnym, liczba 5 w sensie pozaczasowym. Niekiedy mówimy nawet, że coś istnieje w sensie przenośnym. Z Quine’owskiego punktu widzenia wprowadzanie tego typu rozróżnień świadczy o bałaganie pojęciowym: istnienie nie jest własnością. Quine nie rozróżnia też odmiennych sposobów istnienia. Przedmioty różnią się własnościami (są żółte, ciężkie, zimne, okrągłe, czasoprzestrzenne, abstrakcyjne), ale nie sposobem istnienia. Istnienie nie jest własnością przedmiotów, a więc tym bardziej nie jest własnością stopniowalną bądź podlegającą dalszym kwalifikacjom. Można powiedzieć, że Quine blokuje tym samym wygodne wyjaśnienie statusu ontologicznego przedmiotów matematycznych. W dyskusji ontologicznej nie możemy uciekać się do sztuczek pozwalających na upchnięcie kłopotliwych obiektów w szufladkach na przedmioty istniejące w najrozmaitszych sensach. Stajemy więc wobec decyzji, czy mamy przyjąć, czy też odrzucić istnienie przedmiotów matematycznych.

Pojawia się tu ogólny problem: jak stwierdzić, czy przedmiot pewnego typu istnieje? Musimy tu zauważyć przede wszystkim, że pytanie o istnienie jest zawsze zrelatywizowane do określonej teorii. Należy zatem pytać „Czy przedmiot *P* istnieje w myśl teorii *T*?”, a nie „Czy przedmiot *P* istnieje *simpliciter*?”. Pytając o istnienie

[13] Quine twierdzi, że wynika to po prostu z naszych przyzwyczajeń: wcześniej opanowujemy fragmenty języka dotyczące przedmiotów fizycznych i to one przeważają w naszej komunikacji. Tego typu zjawisk psychologicznych nie musimy brać pod uwagę przy analizach ontologicznych (Quine 1999: 267-268).

[14] „W granicach nauk przyrodniczych istnieje kontinuum poziomów, od twierdzeń, które są sprawozdaniami z obserwacji, do tych, które wyrażają podstawowe idee, powiedzmy, teorii kwantów czy teorii względności. […] Twierdzenia ontologii, a nawet twierdzenia matematyki i logiki są kontynuacją tego kontinuum, kontynuacją, która jest zapewne jeszcze bardziej odległa od obserwacji niż główne zasady teorii kwantów czy teorii względności. Różnice w tej dziedzinie są […] jedynie różnicami stopnia, a nie rodzaju. Nauka jest strukturą jednolitą i w zasadzie ta struktura jako całość, nie zaś jej zdania składowe z osobna, jest tym, co doświadczenie potwierdza lub podważa” (Quine 1991: 171).

obiektu pewnego typu, pytamy w gruncie rzeczy o założenia, jakie musimy przyjąć, aby móc uznać daną teorię, czyli o jej tzw. zobowiązania ontologiczne. Samo stwierdzenie, że ontologię należy traktować poważnie, niewiele jeszcze mówi. Potrzebne jest bowiem kryterium, które umożliwia rozstrzygnięcie, czy w myśl danej teorii naukowej rzeczywiście istnieje przedmiot pewnego typu. Kryterium to musi umożliwić ustalenie, czy przyjmując daną teorię, zobowiązujemy się do uznania istnienia obiektów określonego typu.

Zwykła analiza gramatyczna nie pozwala na udzielenie odpowiedzi, ponieważ forma gramatyczna nie zawsze odzwierciedla formę logiczną. Zdania „Istnieje w Polsce góra o wysokości ponad 2000 m" i „Istnieje olbrzymi postęp w negocjacjach" mają podobną strukturę, ale interpretujemy je w inny sposób: uznajemy, że z pierwszego zdania w ewidentny sposób wynika istnienie góry, ale z drugiego nie wynika istnienie bytu takiego jak postęp (czy nawet bytu takiego jak negocjacje). Zdanie „Te dwa samochody są podobne" traktujemy inaczej niż zdanie „Te dwa stanowiska są podobne", inne są bowiem presupozycje egzystencjalne towarzyszące uznaniu tych zdań za prawdziwe. Konieczne jest dokonanie pewnej parafrazy, która ukaże ich właściwą strukturę logiczną. Dopiero po analizie tej parafrazy będziemy mogli zidentyfikować zobowiązania ontologiczne. Nasuwa się jednak pytanie o kryteria, na podstawie których uznajemy daną parafrazą za właściwą, a w konsekwencji przyjmujemy istnienie pewnych obiektów[15].

Język naturalny jest bardzo zwodniczy, a obraz świata leżący u podłoża naszych wypowiedzi słabo zdefiniowany. Zauważa to Quine, pisząc:

> Ontologia zwykłego człowieka jest niejasna i nieporządna pod dwoma względami. Obejmuje ona wiele domniemanych przedmiotów, które są niejasno lub nieadekwatnie określone. Ale co ważniejsze, nie jest jasny jej zakres; nie sposób nawet ogólnie stwierdzić, które z tych niejasno określonych przedmiotów wolno w ogóle przypisać ontologii danego człowieka, co traktować jako rzeczy przez niego przyjmowane (Quine 1995: 38).

W codziennej praktyce wprowadzamy jeszcze większy chaos, mówiąc o różnych sensach czy stopniach istnienia, czasami twierdząc, że jest to tylko wygodny sposób mówienia, a czasami interpretując takie stwierdzenia wprost. Potrzebne jest więc jakieś kryterium, aby w tym pojęciowym bałaganie zrobić porządek.

Quine takie kryterium istnienia podaje — jest to tzw. kryterium kwantyfikatorowe. W pewnym uproszczeniu powiemy, że w myśl teorii $T$ istnieje przedmiot typu $P$, jeśli twierdzeniem teorii $T$ jest zdanie „$\exists x\ P(x)$". Kryterium to wygląda banalnie — czy nie znaczy po prostu, że istnieje dokładnie to, co istnieje? Zastosowanie go wymaga jednak pewnych zabiegów przygotowawczych. Konieczne jest sprowadzenie (sparafrazowanie) wypowiedzi do pewnej wyróżnionej „kanonicznej" postaci, a mianowicie do postaci zdania sformułowanego w logice pierwszego rzędu (rachunku

[15] Na jakiej zasadzie rozstrzygamy, na przykład, czy w wypadku zdania „Na tej łące pasie się stado owiec" jesteśmy zobowiązani do uznania bytu takiego jak stado, czy jedynie dwustu pojedynczych owiec?

kwantyfikatorów). Dopiero dzięki kwantyfikacji jesteśmy w stanie stwierdzić, jak wygląda aparat referencjalny danej teorii i w jaki sposób następuje odnoszenie się do przedmiotów (i do jakich przedmiotów)[16].

Kwantyfikatorowe kryterium istnienia jest neutralne względem sporów ontologicznych, w szczególności wobec matematycznej wersji sporu realizm–antyrealizm. O tym, czy dany przedmiot istnieje, nie decydują stosowne cechy „legalizujące" jego istnienie (np. czy jest konkretny, obserwowalny, niezbyt mały, ale i nie za duży, czy oddziałuje przyczynowo, czy jest wyobrażalny itd.), lecz to, czy odnoszą się do niego wyrażenia kwantyfikujące danej teorii. Jeśli tak jest, to musimy zobowiązania ontologiczne tej teorii traktować serio i przyznać, że istnieją wszystkie przedmioty, o których w niej mowa. Zwrot „o tych przedmiotach jest mowa w teorii *T*" znaczy zaś właśnie, że to do nich odnosi się kwantyfikacja[17].

Pogląd Quine'a różni się więc zasadniczo od stanowiska logicznych pozytywistów. Quine zgadza się oczywiście z Carnapem, że w nauce posługujemy się różnymi konstrukcjami pojęciowymi, ale wyciąga z tej obserwacji odmienne wnioski. W jego ujęciu Carnapowski podział na pytania wewnętrzne i zewnętrzne jest nie do utrzymania. Nie da się uchylić pytań o istnienie jako pytań pozbawionych uchwytnego sensu. Oznacza to w szczególności, że pytania o istnienie przedmiotów matematycznych stają się tak samo uprawnionymi pytaniami dotyczącymi zobowiązań ontologicznych teorii jak np. pytanie o istnienie bakterii. Jeśli w myśl pewnej teorii istnieją bakterie oraz funkcje ciągłe, to należy uznać istnienie także tych drugich — bez żadnych nominalistycznych skrupułów. Należy przy tym oczywiście pamiętać, że dotyczy to tylko teorii uprawomocnionych empirycznie.

Jest więc już jasne, dlaczego — i w jakim sensie — można uznać Quine'a za matematycznego empirystę: o tym, czy dane zdanie matematyczne jest prawdziwe, a w szczególności o tym, czy dana teoria matematyczna ma pozajęzykowe odniesienie, decydują wyniki analiz teorii empirycznych. Płynie stąd ważny wniosek: status teorii zinterpretowanych mogą uzyskać jedynie te fragmenty matematyki, które pojawiają się w obrębie teorii fizycznych. Status teorii „czystych" jest inny — uznajemy je, jeśli pełnią rolę porządkującą, jeśli służą upraszczaniu i ujednolicaniu teorii

---

[16] Pomijam tu szczegóły techniczne. Nie poruszam również problemu statusu logiki, pytania o to, jakie pojęcia mają charakter logiczny, kwestii tzw. tezy o logice pierwszego rzędu, statusu logik nieklasycznych (w szczególności logik z innymi kwantyfikatorami).

[17] Można podać taką parafrazę zdań typu „Istnieje duży postęp w negocjacjach" lub „Opinia publiczna jest zbulwersowana", że nie będziemy mieli do czynienia z żadnymi zobowiązaniami do istnienia negocjacji, postępu czy opinii publicznej (jako obiektów). Jeśli jednak taka parafraza nie jest możliwa, należy zaakceptować istnienie przedmiotów, o których w tym wypadku mówią zdania teorii. Wtedy na nic nie zdadzą się wykręty w rodzaju: „Kiedy mówię, że istnieje kamień, to mówię to wprost, ale kiedy mówię, że istnieje liczba $\pi$, to sami rozumiecie… nie da się inaczej… jej tak naprawdę nie ma… ale ja muszę powiedzieć, że jest". Ktoś, kto twierdzi, że z teorii nie sposób pozbyć się terminów mówiących o obiektach abstrakcyjnych, a zarazem utrzymuje, że nie ma powodu, aby wierzyć w ich istnienie, jest intelektualnie nieuczciwy.

matematyki stosowanej. W przeciwnym razie powinniśmy je uznać za systemy niezinterpretowane[18].

Wyjaśnijmy przy okazji pewne nieporozumienie. Skoro Quine jest matematycznym empirystą, powinien przyznać, że twierdzenia matematyczne mogą być falsyfikowane empirycznie — przecież w przeciwnym razie trudno chyba mówić o empiryzmie. Czy znaczy to, że jakieś twierdzenie — choć udowodnione w poprawny sposób i uznane przez matematyków — może zostać sfalsyfikowane w jakimś doświadczeniu (w laboratorium chemika lub fizyka)[19]? Stanowisko empirystyczne Quine'a oczywiście nie zakłada, że w *samej* matematyce stosowane są jakieś procedury o charakterze empirycznym, np. że istnieje jakiś nowy typ dowodzenia twierdzeń lub że zmianie powinien ulec status tradycyjnych procedur dowodowych[20]. Status dowodu pozostaje nienaruszony, nie zmienia się logiczna struktura teorii matematycznych. Kryteria empiryczne są natomiast istotne przy rozstrzyganiu, czy daną teorię matematyczną powinniśmy uznać za zinterpretowaną, jej zdania za prawdziwe (w klasycznym sensie), a przedmioty uwzględnić w naszej ontologii. Quine oczywiście nie mówi o empirycznym weryfikowaniu twierdzeń, lecz o tym, że doświadczenie jest ostateczną instancją wyrokującą o przyjęciu danej teorii fizycznej (wraz z matematycznym instrumentarium). Teoria jest bowiem przyjmowana jako całość — włącznie z aparatem matematycznym. Można powiedzieć, że jej matematyczny fragment „dziedziczy" potwierdzenie empiryczne[21]. Dowody matematyczne zachowują natomiast swój wewnątrzmatematyczny status, choć może okazać się, że nie dowodzą zdań, którym odpowiadają jakieś rzeczywiste korelaty ontologiczne, lecz stanowią jedynie rozrywkę intelektualną.

---

[18] „Ta część matematyki, która jest potrzebna w naukach empirycznych, ma ten sam status co reszta nauki. Pozaskończone rozgałęzienia mają ten sam status, o ile pełnią rolę upraszczającego usystematyzowania [*simplificatory rounding out*], ale reszta ma status niezinterpretowanych systemów" (Quine 1984: 788). „Uznaję nieprzeliczalne nieskończoności tylko dlatego, że są one niezbędne do usystematyzowania zagadnień. Obiekty wykraczające poza te potrzeby, np. $\text{Beth}_\omega$ lub liczby nieosiągalne, uważam za matematyczną rozrywkę i za pozbawione statusu ontologicznego" (Quine 1986c: 400).

[19] Brzmiałoby to co najmniej dziwnie. Czy można wyobrazić sobie grupę chemików (w obowiązkowych białych kitlach), z których jeden mówi: „Koledzy, poczekajmy jeszcze chwilkę. Reakcja za chwilę się skończy i wreszcie dowiemy się, czy twierdzenie Hahna–Banacha nie jest jednak fałszywe"?

[20] Czyli różni się tutaj od Putnama (por. dalej).

[21] W tym sensie uwaga dotycząca empirycznej weryfikacji tez matematycznych nie jest do końca absurdalna: eksperyment oczywiście nie może rozstrzygnąć, czy w ramach danej teorii matematycznej da się udowodnić pewne twierdzenie (np. Hahna–Banacha), może jednak zdecydować np. o tym, czy przyjmujemy teorię wykorzystującą analizę funkcjonalną, czy też wystarczy nam teoria stosująca jedynie tabliczkę mnożenia (która ma znacznie skromniejsze zobowiązania ontologiczne).

## Pięć Zagadnień z punktu widzenia stanowiska Quine'a

Podsumujmy krótko, jak z punktu widzenia stanowiska Quine'a wyglądałyby komentarze do wskazanych na początku studium pięciu zagadnień szczegółowych.

**Zagadnienie stosowalności matematyki (i matematyczność przyrody).** Z Quine'owskiego punktu widzenia stosowalność matematyki to punkt wyjścia rozważań, niejako „surowa dana". Można powiedzieć, że daną jest istnienie nauk empirycznych, posługujących się matematycznym instrumentarium. Quine nie rozważa bezpośrednio kwestii matematyczności przyrody, czyli pytania o to, dlaczego natura jest raczej matematyczna niż niematematyczna. Programowo rezygnuje z analizy takich zagadnień, skupiając się na tym, jakiego rodzaju wnioski dotyczące ontologii można wysnuć z analiz metanaukowych.

**Empiryzm a realizm.** Zależność jest oczywista (choć może zaskakująca): realizm matematyczny jest wnioskiem z empirystycznego stanowiska Quine'a. Należy jednak pamiętać, że do tego wniosku można dojść dopiero po przyjęciu szeregu dodatkowych założeń.

**Status dowodu matematycznego a empiryzm.** Quine nie kwestionuje statusu dowodu matematycznego. Nie rozważa w zasadzie tego problemu — przyjmuje standardowy punkt widzenia. Można powiedzieć, że jest to klasyczna wizja tworzenia matematyki. Jednocześnie Quine nie podejmuje zagadnienia mechanizmów epistemologicznych (o tym mówię też dalej). Teza empiryzmu dochodzi do głosu nie tyle przy rozstrzyganiu kwestii epistemologicznych, ile raczej w chwili, gdy zadajemy pytanie dotyczące interpretacji teorii — a więc pytanie o charakterze ontologicznym.

**Uzasadnianie prawd matematycznych, aksjomaty.** Quine nie podejmuje zagadnień epistemologicznych (a przynajmniej nie czyni tego wprost). Nie rozważa mechanizmów wewnątrzmatematycznych. Przyjmuje niejako do wiadomości, że matematyka działa, jak należy, i jest to fakt wyjściowy — zajmuje się dopiero problemem, czy to, co wymyślili matematycy, ma status teorii zinterpretowanych, czy też intelektualnej rozrywki. Analiza ta następuje jednak *post factum*: z punktu widzenia samego procesu tworzenia matematyki nie ma znaczenia, czy określone teorie matematyczne znajdą zastosowanie[22]. Samej kwestii uzasadniania aksjomatów dla teorii matematycznych Quine nie podejmuje[23]. Mówiąc w uproszczeniu: to, że matematycy stworzyli taką, a nie inną teorię, jest daną empiryczną, analizuje się zaś to, czy teoria ta powinna być interpretowana realistycznie.

**Natura wiedzy matematycznej.** Quine nie analizuje w zasadzie specyfiki wiedzy matematycznej. Wiedza ta jest uprawomocniona empiryczne we wskazanym już

[22] Oczywiście, często jest tak, że dana teoria matematyczna powstaje niejako na zamówienie nauk empirycznych. Nie znaczy to jednak, że jest tworzona w istotnie inny sposób niż pozostałe (np. że obowiązują w niej inne standardy dowodowe).

[23] Na ten temat istnieje obszerna literatura, zwłaszcza w odniesieniu do aksjomatów teorii mnogości (por. np. wymienione w bibliografii prace Maddy, Fefermana, Steela i Friedmana).

sensie (nawet logika może mieć taki charakter). Nie mówi też nic o charakterystycznych dla matematyki procesach poznawczych, o matematyce *an sich* jako przedsięwzięciu intelektualnym. Pod tym względem diametralnie różni się np. od Gödla, podkreślającego szczególną naturę poznania matematycznego i postulującego istnienie intuicji matematycznej jako odrębnej kategorii poznawczej.

## 2. PUTNAM — MATEMATYCY SĄ Z MARSA

W filozofii matematyki stanowisko Quine'a bywa wiązane z poglądem Putnama — często mówi się po prostu o argumencie Quine'a–Putnama z niezbędności. Rzeczywiście, koncepcja tego drugiego pod wieloma względami przypomina ujęcie omówione wyżej, ale nie brak jej także własnej specyfiki[24]. Z punktu widzenia empiryzmu ważne są jej trzy elementy:

1. Powiązanie światopoglądu empirystycznego z realizmem matematycznym.
2. Wskazanie podobieństw metodologicznych między matematyką a naukami empirycznymi.
3. Teza, że wyniki nauk empirycznych mogą mieć wpływ na formowanie się naszych przekonań matematycznych.

**1) Realizm.** Głównym przedmiotem zainteresowania Quine'a jest sposób, w jaki analiza roli matematyki w nauce wpływa na debatę ontologiczną. Putnam w pełni zgadza się z argumentacją Quine'a i także opowiada się za realizmem matematycznym (co wynika w naturalny sposób z jego realistycznego stanowiska w odniesieniu do teorii naukowych). Twierdzi wprost, że „matematyka i fizyka są zintegrowane w taki sposób, iż nie jest możliwe bycie realistą w odniesieniu do teorii fizycznej, a nominalistą w odniesieniu do teorii matematycznej" (Putnam 2002: 261)[25].

**2) Metodologia.** Putnam formułuje kilka uwag (w stylistyce opowieści o matematyce marsjańskiej) na temat quasi-empirycznych procedur w matematyce. Co istotne, nie twierdzi, że za realistyczną interpretacją matematyki przemawia jej rola

---

[24] Mówienie o stanowisku Putnama można uznać za pewne uproszczenie (ponieważ podlegało ono ewolucji). Skupię się tu na wyrazistej wizji matematyki przedstawionej w artykule z 1975 r. (polskie tłumaczenie — Putnam 2002).

[25] Putnam zauważa, że gdyby teorie naukowe interpretować w duchu czysto instrumentalistycznym, a tym samym gdyby ich przyjęciu towarzyszyło postulowanie jedynie „fragmentarycznej" ontologii, to wówczas również prawa nauki należałoby uznać za fikcje: „jest to tak, jakby próbować twierdzić, że Bóg nie istnieje i nie istnieją aniołowie i jednocześnie twierdzić, że jest faktem obiektywnym, iż Bóg postawił anioła na straży każdej gwiazdy, a aniołowie opiekujący się każdą parą gwiazd podwójnych zostali zawsze stworzeni w tym samym czasie! Jeżeli mówienie o liczbach i »przyporządkowaniach« pomiędzy masami itd. a liczbami jest »teologią« (w pejoratywnym sensie), to prawo powszechnego ciążenia także jest teologią" (Putnam 2002: 262).

w naukach empirycznych, lecz że metodologia matematyki w pewien sposób (a przynajmniej pod pewnymi względami) przypomina metodologię nauk empirycznych:

> wiedza matematyczna jest podobna do wiedzy empirycznej, to znaczy, że kryterium prawdziwości w matematyce, tak jak w fizyce, jest sukces polegający na zastosowaniu naszych pomysłów w praktyce i że wiedza matematyczna podlega korygowaniu i nie jest absolutna (Putnam 2002: 246).

Putnam utrzymuje więc, że w matematyce — oprócz dowodzenia w tradycyjnym sensie — można wskazać również quasi-empiryczne metody potwierdzania hipotez matematycznych. Podaje tu kilka przykładów historycznych, w wypadku których pewne „nielegalne" operacje prowadziły do poprawnych wniosków[26]. Twierdzi, że w matematyce współczesnej również można wskazać wiele sytuacji, w których matematycy formują swoje przekonania, nie opierając się na poprawnym dowodzie, lecz raczej na analizach, niekiedy o charakterze quasi-empirycznym. Tego typu quasi-empiryczny schemat argumentacji pojawia się, na przykład, gdy dojdziemy do wniosku, że pewna hipoteza matematyczna jest bardziej owocna czy lepiej współgra z naszym systemem przekonań (jak w wypadku pewnika wyboru). A zatem tradycyjny dowód matematyczny nie jest jedynym sposobem dochodzenia do nowych przekonań matematycznych.

Putnam wyraża tę tezę, oddając głos matematykom marsjańskim (którzy są w istocie przedstawicielami nas samych):

> Wiemy, co to jest dowód, i cenimy go tak wysoko, jak wy, jeśli go uzyskamy. Nie rozumiemy jednak, dlaczego ograniczacie się do dowodów — dlaczego nie chcecie uznać potwierdzenia [*confirmation*]. Istnieją przecież prawdziwe twierdzenia matematyczne, które nie są konieczne ani bezpośrednio, ani w drodze dowodu — są one epistemologicznie przypadkowymi prawdami matematycznymi (Putnam 2002: 249).

Przykłady stosowania metod quasi-empirycznych w matematyce są liczne i nie dotyczą tylko przyjmowania takich, a nie innych założeń ze względu na heurystyczne argumenty quasi-empiryczne. Przykładem (bardzo owocnego) zastosowania tego typu procedury jest utożsamienie geometrii z liczbami rzeczywistymi (Putnam 2002: 250): było ono stosowane w matematyce na długo, zanim stało się jasne, w jakim systemie pojęć można taką wzajemną odpowiedniość zrekonstruować formalnie. Można tutaj dodać, że z punktu widzenia zastosowania matematyki, kiedy np. utożsamia się przestrzeń (czy to przestrzeń fizyczną, czy abstrakcyjnie pojmowaną przestrzeń stanów układu) z $R^3$, $R^n$, jakąś rozmaitością różniczkową itp., formalne szczegóły rekonstrukcji rzeczywiście nie mają żadnego znaczenia, ważna jest owocność w fizyce[27].

---

[26] Np. odkrycie przez Eulera (przy użyciu „niedozwolonych" metod), że $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

[27] Fizyk zazwyczaj nie troszczy się o to, jak formalnie zrekonstruować stosowane przez siebie narzędzia, w jakiej teorii dają się one najbardziej elegancko przedstawić itd. Ważna jest użyteczność

Warto zatrzymać się przy tych przykładach. Zgadzam się z Putnamem w kwestii rygoryzacji narzędzi matematycznych stosowanych w fizyce: dopóki dobrze działają, wszystko jest w porządku (a żaden fizyk nie domaga się, dajmy na to, formalnej rekonstrukcji teorii równań różniczkowych w języku teorii mnogości ZFC). Odrębną sprawą jest jednak, czy bez takich precyzacji i rygoryzacji, jakimi dysponujemy dziś, istniałyby przydatne i skuteczne narzędzia w fizyce. Udzielenie odpowiedzi na to pytanie w takiej postaci nie jest możliwe: rygoryzacja i (do pewnego stopnia) formalizacja już się dokonała, a więc rozważanie kwestii „Jaka byłaby matematyka, gdyby…, i czy fizycy byliby z niej zadowoleni?" jest czystą spekulacją. Przykłady podawane przez Putnama mają charakter historyczny i trzeba je traktować ostrożnie. Czy to, że trzysta lat temu stosowano matematykę (po części w czysto intuicyjny sposób), miałoby świadczyć o tym, że byłoby to możliwe także dzisiaj w wypadku wysoce zmatematyzowanych i teoretycznie wyrafinowanych nauk empirycznych? I czy w ogóle można wyobrazić sobie taki rozwój nauk empirycznych bez owej rygoryzacji? Powoływanie się na wybrane przykłady historyczne dla uzasadniania ogólnej tezy o quasi-empirycznym charakterze matematycznej metodologii jest kontrowersyjne.

**3) Wpływ fizyki na matematykę.** Związki fizyki z matematyką polegają nie tylko na tym, że w matematyce pojawiają się procedury w pewien sposób analogiczne do tych znanych z fizyki, lecz także na tym, że nauki empiryczne mogą wpływać na formowanie się naszych przekonań matematycznych. Ich źródłem nie jest więc jedynie aprioryczna analiza pojęć. Rzecz jasna, nie chodzi tutaj o percepcję zmysłową, która — przez indukcyjne uogólnienia — będzie prowadzić do nowych prawd matematycznych (jak chciał Mill). W poznaniu matematycznym istnieje jednak wyraźny składnik empiryczny:

> Będziemy musieli stanąć przed faktem, że przeciwstawienie empiryczny–matematyczny jest tylko przeciwstawieniem relatywnym: większość matematyki jest także „empiryczna" w sensie mniej ścisłym i bardziej pośrednim niż zwykłe stwierdzenia „empiryczne" (Putnam 2002: 264).

Pojawia się pytanie, w jakim sensie można tutaj mówić o wpływie i czy przyjęcie tezy o rosnącym oddziaływaniu inspiracji fizycznych na matematykę pozwala twierdzić, że granica między naukami empirycznymi a matematyką się zaciera. Moim zdaniem sam fakt, że na badania matematyczne rzutują kwestie zastosowań (chociażby przez dostarczanie ciekawych obszarów do badań, by nie wspomnieć o finansowa-

---

i owocność w opisie sytuacji fizycznych. Putnam przytacza tu przykład rachunku różniczkowego: skoro jest użyteczny, to będzie stosowany, niezależnie od tego, czy poda się jakiś sposób formalizacji (czy w ogóle jakieś daleko idące uściślenie) (Putnam 2002: 252). Rachunek różniczkowy był przecież stosowany, zanim nastąpiła rygoryzacja analizy i zanim pojawiły się np. ścisłe definicje ciągłości. Oczywiście, przy braku poprawnej matematycznie rekonstrukcji może dojść do nieścisłości, paradoksów lub sprzeczności. Nie zmienia to jednak faktu, że teorie matematyczne są stosowane w fizyce „tak jak stoją", a nie dopiero po sformalizowaniu. Klasycznym przykładem sytuacji, w której nadal brakuje zadowalającego instrumentarium formalnego, natomiast pewne pojęcia są już z powodzeniem stosowane w fizyce, jest delta Diraca.

niu), nie świadczy jeszcze o tym, że zmianie podlega status aksjomatów matematycznych (i że stają się one „bardziej empiryczne”). To, że pewna teoria $T$ jest bardziej użyteczna od teorii $T^*$, nie musi oznaczać, że $T$ opisuje pewną sytuację empiryczną[28]. Problem jest subtelny: w jakim sensie i na jakim poziomie matematyka odzwierciedla te empiryczne inspiracje?

Według Putnama może się okazać, że „źródłem odpowiedzi na fundamentalne pytania, powiedzmy, że na temat kontinuum, będą w przyszłości nie jedynie nowe »intuicje«, ale także odkrycia fizyko-matematyczne” (Putnam 2002: 264-265). Czy chodzi o to, że dowiemy się czegoś nowego o naszym rozumieniu liczb rzeczywistych dzięki jakimś wynikom fizycznym? Czy może raczej dowiemy się, jakie założenia na temat kontinuum okażą się bardziej owocne z punktu widzenia nauk fizycznych? Tezę tę można rozumieć jeszcze inaczej, jako wyraz stanowiska empiryzmu genetycznego: gdyby wszystkie pojęcia matematyczne miały ostateczne źródło w empirii, to trudno byłoby się dziwić, że wraz z napływem danych empirycznych przekształca się także nasze rozumienie tych pojęć — zaczynamy dostrzegać nowe aspekty, które były wcześniej ukryte albo nierozstrzygnięte.

## Pięć Zagadnień z punktu widzenia stanowiska Putnama

**Zagadnienie stosowalności matematyki.** Stosowalność matematyki w fizyce (i ogólnie — w naukach przyrodniczych) stanowi pierwszy krok w argumentacji na rzecz realizmu. Podobnie jak w wypadku stanowiska Quine’a można ów fakt potraktować jako daną empiryczną, będącą punktem wyjścia analizy filozoficznej.

**Empiryzm a realizm.** Tutaj sytuacja jest bardzo podobna do wypadku stanowiska Quine’a: empiryzm wraz z uznaniem argumentu z niezbędności i Quine’owskiej koncepcji istnienia prowadzi do realistycznej interpretacji matematyki.

**Status dowodu matematycznego a empiryzm.** Stanowisko Putnama jest dość różne od poglądów omawianych do tej pory. Dowód matematyczny jest oczywiście podstawowym sposobem zdobywania nowej wiedzy matematycznej — ale nie jedynym. Putnam pisze jasno:

> dowód i wnioskowania quasi-empiryczne należy traktować jako komplementarne. Dowód ma tę wielką zaletę, że nie zwiększa ryzyka niesprzeczności, podczas gdy wprowadzanie nowych aksjomatów i nowych obiektów zwiększa takie ryzyko, przynajmniej dopóty, dopóki nie zostanie znaleziona interpretacja nowej teorii w pewnej teorii już zaakceptowanej (Putnam 2002: 264).

Oczywiście, nie zrównuje dowodu z argumentami heurystycznymi, domaga się jednak, aby uznać je za ważną metodę pozyskiwania nowej wiedzy.

---

[28] To, że np. ciągły rozkład Gaussa lepiej stosuje się do opisu rozkładu cech w populacjach niż inny rozkład probabilistyczny, nie znaczy, że rozkład ten ma empiryczny charakter lub że opisuje wprost pewną empiryczną sytuację (chociażby ze względu na to, że stanowi pewne przybliżenie tego, co się dzieje w próbce o dużej liczności).

**Uzasadnianie prawd matematycznych i status aksjomatów.** Zdaniem Putnama nic nie stoi na przeszkodzie, by na tworzenie się naszych przekonań matematycznych istotny wpływ wywierały wyniki nauk empirycznych. Nie wyklucza również, że rozwój nauk pozwoli nam na znalezienie odpowiedzi na fundamentalne pytania *matematyczne*[29].

**Natura wiedzy matematycznej.** Przede wszystkim należy zauważyć, że jest to rzeczywiście *wiedza*, a nie zestaw konwencji. Istotnym wyróżnikiem stanowiska Putnama jest akcentowanie związków z naukami empirycznymi. Związki te przejawiają się zarówno w obecności quasi-empirycznych metod w matematyce, jak i w tym, że na formowanie się przekonań matematycznych może oddziaływać rozwój nauk empirycznych:

> spodziewam się, że wraz z rozwojem nauk fizycznych [ich] wpływ na aksjomaty matematyczne będzie stawał się raczej większy niż mniejszy i że będziemy musieli stanąć przed faktem, iż przeciwstawienie empiryczny–matematyczny jest tylko przeciwstawieniem relatywnym; większość matematyki jest także „empiryczna" w sensie mniej ścisłym i bardziej pośrednim niż zwykłe twierdzenia „empiryczne" (Putnam 2002: 264).

## PODSUMOWANIE

Stanowisko empiryzmu może przyjmować różne formy, nie sposób więc mówić o jednolitym stanowisku „matematycznego empiryzmu". Może łączyć się zarówno z realizmem (jak np. w wypadku Quine'a czy Putnama), jak i z instrumentalizmem (jak w wypadku Carnapa i Berkeleya). Da się też pogodzić z różnymi poglądami na temat stosowalności matematyki czy mechanizmów rozwoju matematyki i statusu dowodu matematycznego.

## BIBLIOGRAFIA


Balaguer M. (1998), *Platonism and Anti-platonism in Mathematics*, Oxford: Oxford University Press.

Burgess J. P., Rosen G. (1997), *A Subject with No Object. Strategies for Nominalistic Interpretations of Mathematics*, Oxford: Clarendon Press.

Chihara C. (1990), *Constructibility and Mathematical Existence*, Oxford: Clarendon Press.

Feferman S. (2000), *Why the Programs for New Axioms Need to Be Questioned*, „The Bulletin of Symbolic Logic" 6(4), 401-413.

Field H. (1980), *Science without Numbers*, Oxford: Basil Blackwell.

Friedman H. (2000), *Normal Mathematics Will Need New Axioms*, „The Bulletin of Symbolic Logic" 6(4), 434-446.

Hellman G. (1989), *Mathematics without Numbers*, Oxford: Clarendon Press.


[29] Może się więc okazać, że „źródłem odpowiedzi na fundamentalne pytania, powiedzmy, że na temat kontinuum, będą w przyszłości nie jedynie nowe »intuicje«, ale także odkrycia fizyko-matematyczne" (Putnam 2002: 264-265).

Maddy P. (1988a), *Believing the Axioms. I*, „Journal of Symbolic Logic" 53(2), 481-511.

Maddy P. (1988b), *Believing the Axioms. II*, „Journal of Symbolic Logic" 53(3), 736-764.

Maddy P. (1990), *Realism in Mathematics*, New York, NY: Oxford University Press.

Maddy P. (1993), *Does V Equal L?*, „Journal of Symbolic Logic" 58(1), 15-41.

Maddy P. (1997), *Naturalism in Mathematics*, Oxford: Clarendon Press.

Maddy P. (2000), *Does Mathematics Need New Axioms?*, „The Bulletin of Symbolic Logic" 6(4), 413-422.

Putnam H. (1975), *What is Mathematical Truth?* [w:] *Mathematics, Matter and Method: Philosophical Papers*, t. 1, New York, NY: Cambridge University Press, 60-78.

Putnam H. (2002), *Czym jest prawda matematyczna?* [w:] *Współczesna filozofia matematyki. Wybór tekstów*, R. Murawski (red.), Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 244-265.

Quine W. V. O. (1953), *Two Dogmas of Empiricism* [w:] *From a Logical Point of View*, New York, NY: Cambridge University Press, 20-46.

Quine W. V. O. (1969a), *O tym, co istnieje* [w:] *Z punktu widzenia logiki*, Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 9-34.

Quine W. V. O. (1969b), *Dwa dogmaty empiryzmu* [w:] *Z punktu widzenia logiki*, Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 35-70.

Quine W. V. O. (1981), *Things and Their Place in Theories* [w:] *Theories and Things*, Cambridge, MA: Harvard University Press, 1-23.

Quine W. V. O. (1984), *Review*. Mathematics in Philosophy: Selected Essays, *by Charles Parsons*, „Journal of Philosophy" 81(12), 783-794.

Quine W. V. O. (1986a), *O mnożeniu bytów* [w:] *Granice wiedzy i inne eseje filozoficzne*, Warszawa: Państwowy Instytut Wydawniczy, 81-86.

Quine W. V. O. (1986b), *Epistemologia znaturalizowana* [w:] *Granice wiedzy i inne eseje filozoficzne*, Warszawa: Państwowy Instytut Wydawniczy, 106-125.

Quine W. V. O. (1986c), *Reply to Charles Parsons* [w:] *The Philosophy of W. V. Quine*, L. Hahn, P. A. Schlipp (red.), La Salle, IL: Open Court, 396-403.

Quine W. V. O. (1991), *O poglądach Carnapa na ontologię* [w:] *Empiryzm współczesny*, B. Stanosz (red.), Warszawa: Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, 163-172.

Quine W. V. O. (1995), *Rzeczy i ich miejsce w teoriach* [w:] *Metafizyka w filozofii analitycznej*, T. Szubka (red.), Lublin: TN KUL, 31-52.

Quine W. V. O. (1999), *Słowo i przedmiot*, Warszawa: Fundacja Aletheia.

Shapiro S. (1997), *Philosophy of Mathematics. Structure and Ontology.* New York, NY: Oxford University Press.

Steel J. R. (2000), *Mathematics Needs New Axioms*, „The Bulletin of Symbolic Logic" 6(4), 422-433.

Tieszen R. (1984), *Mathematical Intuition and Husserl's Phenomenology*, „Nous" 18(3), 395-421.

Tieszen R. (1988), *Phenomenology and Mathematical Knowledge*, „Synthese" 75(3), 373-403.

Tieszen R. (1992), *Kurt Gödel and Phenomenology*, „Philosophy of Science" 59(2), 176-194.

Tieszen R. (1998), *Gödel's Path from the Incompleteness Theorems (1931) to Phenomenology (1961)*, „The Bulletin of Symbolic Logic" 4(2), 181-203.

Tieszen R. (2000), *Gödel and Quine on Meaning and Mathematics* [w:] *Between Logic and Intuition. Essays in Honor of Charles Parsons*, G. Sher, R. Tieszen (red.), New York, NY: Cambridge University Press.

Wójtowicz K. (2015), *Inspiracje empirystyczne w filozofii matematyki. Część I*, „Filozofia Nauki" 23(3) [91], 57-75.