Filozofia Nauki
Rok XXII, 2014, Nr 4(88)

Andrzej Indrzejczak

Powstanie i ewolucja rachunków sekwentowych[1]

W (Indrzejczak 2014) przypomnieliśmy o wkładzie Jaśkowskiego i Gentzena w powstanie i rozwój systemów dedukcji naturalnej. Przy okazji napomknęliśmy o innym wynalazku Gentzena, który odniósł potem ogromny sukces w teorii dowodu. Rachunki sekwentowe — bo o nich mowa — to potężne narzędzie, które pozwala w przejrzysty sposób ukazać wiele interesujących własności systemów formalnych. Niestety znajomość tych rachunków w Polsce, kraju o wielkich tradycjach logicznych, jest niewystarczająca. Artykuł ma na celu elementarne i nieformalne wprowadzenie do teorii i zastosowań rachunków sekwentowych. Mijająca właśnie osiemdziesiąta rocznica publikacji pracy Gentzena jest dobrą okazji, by przypomnieć podstawowe fakty związane z zastosowaniami jego wynalazku.

Określenie „rachunek sekwentów” (RS) współcześnie stosowane jest w odniesieniu do obszernej grupy systemów dedukcyjnych o zbliżonym charakterze. Systemy takie często określa się też ze względu na nazwisko autora systemami Gentzena. Chociaż w konkretnych przypadkach mogą pojawić się wątpliwości natury klasyfikacyjnej, to systemy RS, zwłaszcza w klasycznej postaci, wyraźnie odróżniają się od systemów aksjomatycznych czy dedukcji naturalnej. Mają też znacznie dłuższą historię niż tak popularne współcześnie rodzaje formalizacji, jak systemy rezolucji lub systemy tablicowe. RS pozostaje zresztą w ścisłym związku z tymi rodzajami systemów dedukcyjnych, co pokażemy w paragrafie 6.

---

[1] Praca została wykonana w ramach realizacji projektu 2011/03/B/HS1/04366 finansowanego przez Narodowe Centrum Nauki.

1. UWAGI HISTORYCZNE

Systemy RS wywodzą się z badań Gentzena nad stworzeniem formalizmów innego typu niż systemy aksjomatyczne, stanowiące na początku lat trzydziestych jedyną znaną formę przedstawiania logiki (Gentzen 1934-1935). Badania te zaowocowały powstaniem dwóch rodzajów takich systemów — dedukcji naturalnej (DN) i rachunku sekwentów. Poszukiwanie pierwszego było właściwym celem Gentzena, natomiast drugi został wprowadzony jako pomocniczy i czysto techniczny środek do udowodnienia pewnych własności systemu DN (m.in. równoważności z systemem aksjomatycznym logiki intuicjonistycznej i klasycznej, a przede wszystkim istnienia dowodów o szczególnej postaci, zwanych dowodami normalnymi). Mimo tej z założenia służebnej roli to właśnie rachunek sekwentów i udowodnione przez Gentzena tzw. główne twierdzenie (*Hauptsatz*), zwane później zazwyczaj twierdzeniem o eliminacji cięcia, otworzyły drogę zarówno do konstrukcji pierwszych systemów automatycznego dowodzenia twierdzeń (m.in. Hintikka 1955, Beth 1955, Kanger 1957, Wang 1960), jak i do rozwoju nowoczesnej teorii dowodu. O wybranych konsekwencjach tego twierdzenia powiemy w paragrafie 3.

Nazwa RS pochodzi od sekwentów — podstawowych jednostek, których dotyczą reguły, na których zdefiniowane są reguły. Gentzen zapożyczył to pojęcie od Hertza (1929) (który posługiwał się określeniem „zdanie", a nie „sekwent"), lecz dokonał daleko idącej modyfikacji. Prace Hertza podejmowały problem ustalenia ogólnych własności strukturalnych dowodu. Sekwent (zdanie) Hertza to obiekt postaci $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B$, gdzie A_i i B oznaczają formuły ustalonego języka. Zgodnie z intuicją sekwent Hertza wyrażał inferencję (wnioskowanie) z przesłanek $A_1, \ldots, A_n$ do wniosku B. Hertz nie zdefiniował rachunku w sensie zbioru reguł, a w istocie nie podał żadnej reguły dla jakiejkolwiek stałej logicznej. Gentzen poszedł dalej, przedstawiając pełne zestawy reguł dla logiki pierwszego rzędu — intuicjonistycznej i klasycznej. W celu formalizacji tej ostatniej uogólnił też pojęcie sekwentu do postaci $X \Rightarrow Y$, gdzie X i Y to skończone, potencjalnie puste ciągi formuł ustalonego języka, zwane odpowiednio poprzednikiem (ciąg X) i następnikiem (ciąg Y) sekwentu. Nieco później (Gentzen 1936) wprowadził też system dedukcji naturalnej o charakterze sekwentowym, który omówiliśmy w (Indrzejczak 2014). Sam Gentzen (1938) wykorzystał swoje rachunki m.in. do udowodnienia niesprzeczności arytmetyki pierwszego rzędu bez reguły indukcji.

Kolejne modyfikacje systemu Gentzenowskiego przyniosły lata czterdzieste i pięćdziesiąte. Do ważniejszych zaliczyć można pewne uproszczenia formalizmu Gentzena, np. przez zastąpienie ciągów jako elementów sekwentu multizbiorami, czyli zbiorami z powtórzeniami elementów, lecz bez ustalania kolejności (Ono 1938). Później popularne stało się definiowanie sekwentów jako par zbiorów formuł (np. Smullyan 1968). Inne uproszczenia, które omówimy niżej, osiągnięto na drodze modyfikacji pewnych reguł, np. w (Ketonen 1944) i (Kleene 1952). Bardzo wcześnie zaczęły też powstawać różne warianty rachunków sekwentowych nastawione bardziej na praktyczną stosowalność w konstrukcji dowodów[2] niż zastosowania teoretyczne, które były celem Gentzena.

Przykładów zaawansowanych zastosowań teorii dowodu z użyciem rachunków sekwentowych dostarczają klasyczne już prace: (Takeuti 1987), (Schütte 1977) i (Troelstra, Schwichtenberg 1996). Rachunki sekwentowe wykorzystywane są w nich m.in. jako narzędzie dowodzenia twierdzeń o niesprzeczności teorii matematycznych. Od lat dziewięćdziesiątych można odnotować znaczący rozwój tzw. strukturalnej teorii dowodu, której przystępne przedstawienie znajduje się w (Negri, von Plato 2001 i 2011). Głównym celem tego podejścia jest analiza własności dowodów w teoriach matematycznych.

Niezależnie od wielkiego sukcesu rachunków sekwentowych w teorii dowodu znalazły one również zastosowania w różnego rodzaju analizach filozoficznych, zwłaszcza w teoretycznych badaniach nad problemem relacji konsekwencji o ogólniejszym charakterze niż operacje konsekwencji Tarskiego. Omówimy je pokrótce w paragrafie 7.

Warto też zauważyć, że już od lat pięćdziesiątych pojawiły się zastosowania rachunków sekwentowych w logikach nieklasycznych innych niż logika intuicjonistyczna, która została sformalizowana już w (Gentzen 1934-1935). Jednak na przykład prace dotyczące rachunków sekwentowych dla logik modalnych (np. Ohnishi, Matsumoto 1957) i logik relewantnych (np. Anderson, Belnap 1975) ujawniły pewne ograniczenia standardowego aparatu Gentzena. Przede wszystkim reguły wielu z tych rachunków nie mogły realizować ustalonego schematu reguł, który wprowadził Gentzen, co w rezultacie prowadziło do utraty ważnych własności rachunków sekwentowych, w szczególności do braku eliminacji cięcia. Próby ominięcia tych trudności doprowadziły do rozwoju uogólnionych form RS, które omówimy w paragrafie 5. Niezależnie od tego pogłębiona analiza standardowego rachunku Gentzena, a zwłaszcza tzw. reguł strukturalnych, doprowadziła do rozwoju badań nad logikami podstrukturalnymi. Omówimy je w paragrafie 8.

2. SYSTEM GENTZENA

Przedstawimy teraz oryginalny RS Gentzena dla logiki klasycznej, nazwany przez niego LK (*Logistische Kalkül*). Składa się on z następujących (schematów) reguł, w których A i B oznaczają dowolne formuły, a X, Y, Z, W — skończone ciągi formuł:

(Ax) $A \Rightarrow A$ (Cut) $\dfrac{X \Rightarrow Y, A \qquad A, Z \Rightarrow W}{X, Z \Rightarrow Y, W}$

[2] Należą do nich np. systemy przedstawione w (Hermes 1963) i (Hasenjaeger 1962); omówiliśmy je w (Indrzejczak 2014), ponieważ należą raczej do grupy systemów dedukcji naturalnej.

$$(\mathrm{P}\Rightarrow)\quad \frac{X, A, B, Y \Rightarrow Z}{X, B, A, Y \Rightarrow Z} \qquad (\Rightarrow\mathrm{P})\quad \frac{X \Rightarrow Y, A, B, Z}{X \Rightarrow Y, B, A, Z}$$

$$(\mathrm{W}\Rightarrow)\quad \frac{X \Rightarrow Y}{A, X \Rightarrow Y} \qquad (\Rightarrow\mathrm{W})\quad \frac{X \Rightarrow Y}{X \Rightarrow Y, A}$$

$$(\mathrm{C}\Rightarrow)\quad \frac{A, A, X \Rightarrow Y}{A, X \Rightarrow Y} \qquad (\Rightarrow\mathrm{C})\quad \frac{X \Rightarrow Y, A, A}{X \Rightarrow Y, A}$$

$$(\sim\Rightarrow)\quad \frac{X \Rightarrow Y, A}{\sim A, X \Rightarrow Y} \qquad (\Rightarrow\sim)\quad \frac{A, X \Rightarrow Y}{X \Rightarrow Y, \sim A}$$

$$(\wedge\Rightarrow)\quad \frac{A, X \Rightarrow Y}{A\wedge B, X \Rightarrow Y}\ ,\ \frac{B, X \Rightarrow Y}{A\wedge B, X \Rightarrow Y} \qquad (\Rightarrow\wedge)\quad \frac{X \Rightarrow Y, A \quad X \Rightarrow Y, B}{X \Rightarrow Y, A\wedge B}$$

$$(\vee\Rightarrow)\quad \frac{A, X \Rightarrow Y \quad B, X \Rightarrow Y}{A\vee B, X \Rightarrow Y} \qquad (\Rightarrow\vee)\quad \frac{X \Rightarrow Y, A}{X \Rightarrow Y, A\vee B}\ ,\ \frac{X \Rightarrow Y, B}{X \Rightarrow Y, A\vee B}$$

$$(\rightarrow\Rightarrow)\quad \frac{X \Rightarrow Y, A \quad B, Z \Rightarrow W}{A\rightarrow B, X, Z \Rightarrow Y, W} \qquad (\Rightarrow\rightarrow)\quad \frac{A, X \Rightarrow Y, B}{X \Rightarrow Y, A\rightarrow B}$$

$$(\forall\Rightarrow)\quad \frac{A(x/t), X \Rightarrow Y}{\forall xA, X \Rightarrow Y} \qquad (\Rightarrow\forall)\quad \frac{X \Rightarrow Y, A(x/a)}{X \Rightarrow Y, \forall xA}$$

$$(\exists\Rightarrow)\quad \frac{A(x/a), X \Rightarrow Y}{\exists xA, X \Rightarrow Y} \qquad (\Rightarrow\exists)\quad \frac{X \Rightarrow Y, A(x/t)}{X \Rightarrow Y, \exists xA}$$

W czterech ostatnich regułach A(x/t) oznacza operację poprawnego podstawienia dowolnego termu t za wszystkie wolne wystąpienia zmiennej x, natomiast A(x/a) operację poprawnego podstawienia takiej zmiennej a, która nie występuje w całym sekwencie.

Dowód sekwentu S jest definiowany jako drzewo, którego liście są sekwentami aksjomatycznymi, a pozostałe węzły są wydedukowane z pomocą podanych wyżej reguł, przy czym korzeniem drzewa jest S. Odpowiednikiem tez są sekwenty postaci $\Rightarrow$ A, czyli z pustym poprzednikiem i jedną formułą w następniku. Dla ilustracji podajemy dowód prawa wyłączonego środka:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{p \Rightarrow p}{p \Rightarrow p\vee\sim p}\ (\Rightarrow\vee)}{\Rightarrow p\vee\sim p, \sim p}\ (\Rightarrow\sim)}{\Rightarrow p\vee\sim p, p\vee\sim p}\ (\Rightarrow\vee)}{\Rightarrow p\vee\sim p}\ (\Rightarrow\mathrm{C})$$

Zauważmy, że jeśli na reguły LK nałożymy warunek, zgodnie z którym w następniku sekwentu może wystąpić co najwyżej jedna formuła (zatem Y jest pustym ciągiem, a reguły kontrakcji i permutacji w następniku stają się zbędne), to otrzymamy rachunek LJ, który stanowi formalizację logiki intuicjonistycznej. Na przykładzie przedstawionego dowodu widzimy, dlaczego takie ograniczenie uniemożliwia dowód prawa wyłączonego środka w systemie LJ: w trzecim i czwartym wierszu wystąpiły dwie formuły w następniku sekwentu.

Aby dokładnie zrozumieć przydatność RS jako narzędzia nowoczesnej teorii dowodu, warto przyjrzeć się bliżej konstrukcji reguł i ich własności. Zauważmy na początku, że w RS występują dwa rodzaje reguł:

> **Reguły strukturalne**[3], w których schematach nie występują w ogóle stałe logiczne. Reguły te dotyczą jedynie najogólniejszych operacji dokonywanych na elementach sekwentów, które są niezależne od kształtu formuł. Inaczej mówiąc, reguły strukturalne tworzą teorię $\Rightarrow$. W regułach strukturalnych W oznacza osłabianie (od *weakening*), C — kontrakcję, a P — permutację. Nazwa reguły cięcia, (Cut), wywodzi się stąd, że formuła A występująca w obu przesłankach ulega niejako wycięciu w sekwencie-wniosku.
>
> **Reguły logiczne** podają warunki wprowadzania do sekwentu stałych logicznych, a dokładniej — formuł z taką stałą. Tworzą one teorię rozważanych stałych logicznych. Reguły logiczne pozwalają na wprowadzenie stałej zarówno do poprzednika, jak i do następnika sekwentu. Nazwy reguł odzwierciedlają ich funkcję.

Łatwo zauważyć, że jeżeli $\Rightarrow$ rozumieć jako symbol inferencji, to reguły strukturalne odpowiadają warunkom nakładanym na relację konsekwencji; aksjomaty wyrażają zwrotność tej relacji, natomiast osłabianie odpowiada monotoniczności (powrócimy do tej kwestii w paragrafie 7). Reguły kontrakcji i permutacji nie mają takich odpowiedników, ponieważ standardowe operacje konsekwencji w sensie Tarskiego są definiowane na zbiorach formuł, czyli nie rozróżniają ani liczby wystąpień, ani kolejności. Obecność tych reguł redukuje w istocie skończone ciągi w poprzedniku i następniku sekwentu do zbiorów. Gentzen potrzebował ciągów i tych reguł, ponieważ traktował dowody jako rodzaj konkretnych skończonych struktur i był zainteresowany pokazaniem pewnych kombinatorycznych przekształceń dowodów. Dla jego następców było jednak jasne, że w kontekście innych metodologii i zastosowań można pozbyć się tych reguł i potraktować sekwenty jako uporządkowane pary skończonych zbiorów. Takie rozwiązanie bardzo upraszcza przedstawianie systemu w wypadku logiki klasycznej, intuicjonistycznej i pewnych logik nieklasycznych nadbudowanych nad logiką klasyczną[4]. Jednak w wypadku formalizowania logik słabszych od klasycznej zastępowanie ciągów zbiorami niekoniecznie daje dobre rezultaty. Wrócimy do tej kwestii w paragrafie 8.

---

[3] Wszystkie reguły są strukturalne w sensie domknięcia na podstawianie, co uzasadnia ich przedstawienie w postaci schematów metajęzykowych. W Gentzenowskiej teorii dowodu termin „strukturalne" ma zatem inne znaczenie niż w teorii konsekwencji wywodzącej się z tradycji Tarskiego.

[4] Warto jednak zauważyć, że zamiana ciągów i multizbiorów na zbiory formuł w sekwentach nie jest aż tak niewinnym zabiegiem, ponieważ nawet przy formalizacji logiki klasycznej może prowadzić do pewnych trudności formalnych (por. Negri, von Plato 2011).

Porównując reguły dla implikacji z regułami dla koniunkcji i alternatywy, możemy zauważyć interesującą różnicę. Z jednej strony dwuprzesłankowe reguły dla koniunkcji i alternatywy można określić jako kontekstowo zależne, ponieważ w obu przesłankach mamy identyczne konteksty, tj. ciągi formuł X, Y. W przeciwieństwie do nich (Cut) i dwuprzesłankowa reguła dla implikacji są kontekstowo niezależne. Z drugiej strony jednoprzesłankowe reguły dla koniunkcji i alternatywy mają w przesłankach tylko jeden składnik formuły z wniosku (dlatego mamy po parze takich reguł), podczas gdy reguła dla implikacji zawiera oba składniki. Oczywiście, można zdefiniować reguły dla koniunkcji i alternatywy analogiczne do tych dla implikacji i odwrotnie — dla implikacji podać takie reguły, jakie Gentzen przewidział dla koniunkcji i alternatywy:

$$(\wedge\Rightarrow')\quad \frac{A, B, X \Rightarrow Y}{A\wedge B, X \Rightarrow Y} \qquad (\Rightarrow\wedge')\quad \frac{X \Rightarrow Y, A \qquad Z \Rightarrow W, B}{X, Z \Rightarrow Y, W, A\wedge B}$$

$$(\vee\Rightarrow')\quad \frac{A, X \Rightarrow Y \qquad B, Z \Rightarrow W}{A\vee B, X, Z \Rightarrow Y, W} \qquad (\Rightarrow\vee')\quad \frac{X \Rightarrow Y, A, B}{X \Rightarrow Y, A\vee B}$$

$$(\rightarrow\Rightarrow')\quad \frac{X \Rightarrow Y, A \qquad B, X \Rightarrow Y}{A\rightarrow B, X \Rightarrow Y} \qquad (\Rightarrow\rightarrow')\quad \frac{A, X \Rightarrow Y}{X \Rightarrow Y, A\rightarrow B} \qquad \frac{X \Rightarrow Y, B}{X \Rightarrow Y, A\rightarrow B}$$

Odpowiednie warianty $(\wedge\Rightarrow')$, $(\Rightarrow\vee')$, $(\rightarrow\Rightarrow')$ po raz pierwszy wprowadził Ketonen (1944)[5].

Oczywiście, gdy mamy do dyspozycji wszystkie reguły strukturalne, to obie wersje reguł logicznych są równoważne i definiują dokładnie te same spójniki. Jednak po usunięciu niektórych reguł strukturalnych równoważność już nie zachodzi i otrzymujemy charakterystykę innych stałych. Mianowicie, dwuprzesłankowe reguły kontekstowo zależne i jednoprzesłankowe reguły z jednym składnikiem w przesłance definiują tzw. spójniki addytywne, podczas gdy dwuprzesłankowe reguły kontekstowo niezależne i jednoprzesłankowe z oboma składnikami definiują spójniki multiplikatywne. Zostało to zauważone i wykorzystane przez Girarda (1987) przy konstrukcji logiki linearnej, w której nie obowiązują reguły kontrakcji i osłabiania, a występują oba typy reguł logicznych. W rzeczywistości rozróżnienie tych stałych było znane już wcześniej na gruncie badań nad logikami relewantnymi, gdzie addytywne spójniki były określane jako ekstensjonalne, a multiplikatywne jako intensjonalne.

Zatem w oryginalnym systemie Gentzena reguły dla koniunkcji i alternatywy definiują spójniki addytywne, a dla implikacji — spójnik multiplikatywny. Jeżeli poszukujemy jednak wersji RS, która jest optymalna ze względu na łatwe poszukiwanie dowodu, to najlepiej użyć dwuprzesłankowych reguł addytywnych i jednoprzesłankowych multiplikatywnych (wariant Ketonena). Co więcej, jeżeli użyjemy sekwentów złożonych ze zbiorów, to pozbywamy się reguł permutacji i kontrakcji, a jeśli

[5] Oczywiście takie rozwiązanie jest nie do przyjęcia dla alternatywy w LJ, ponieważ mielibyśmy w następniku przesłanki więcej niż jedną formułę.

dodatkowo wprowadzimy uogólnione aksjomaty o postaci A, X $\Rightarrow$ Y, A, to możemy pozbyć się również reguł osłabiania. Jedyną trudność może nam sprawić reguła cięcia.

3. ELIMINACJA CIĘCIA

Oprócz (Cut) wszystkie reguły zdaniowe Gentzena spełniają tzw. własność podformuł, zgodnie z którą każda formuła pojawiająca się w przesłankach występuje jako (pod)formuła również we wniosku. W wypadku reguł dla kwantyfikatorów własność ta ma uogólniony charakter, ponieważ formuła z przesłanki nie jest bezpośrednio użyta jako podformuła formuły skwantyfikowanej we wniosku, lecz podlega podstawieniu. Własność podformuł ma szereg ważnych konsekwencji, toteż wykazywanie, że regułę cięcia można z dowodów wyeliminować, jest bardzo ważnym osiągnięciem. Dla ilustracji omówimy krótko dwie konsekwencje eliminacji (Cut); jedną o charakterze formalno-logicznym i jedną o charakterze filozoficznym[6].

1. Każdy rachunek sekwentów, którego wszystkie reguły spełniają własność podformuł i który jest adekwatny względem pewnej logiki, można wykorzystać do dowodu rozstrzygalności tej logiki. Innymi słowy, możemy zdefiniować automatyczną procedurę budowy drzewa dla sekwentu S, która w wypadku rachunku zdań w skończonej liczbie kroków dostarczy odpowiedzi na pytanie, czy sekwent ten jest dowiedlny (tzn. zbuduje jego dowód). W tym celu zaczynamy konstrukcję drzewa od sprawdzanego sekwentu S (korzenia) i systematycznie stosujemy do niego reguły wstecz, czyli dodajemy sekwenty-przesłanki. Własność podformuł gwarantuje, że na każdym etapie mamy skończoną liczbę możliwych ruchów, a każda gałąź musi zakończyć się sekwentem zawierającym tylko zmienne zdaniowe. Oczywiście, w wypadku logiki pierwszego rzędu, która jak wiadomo jest nierozstrzygalna, nie jest to możliwe, ale jej reguły (nawet bez (Cut)) nie posiadają własności podformuł w sensie ścisłym. Niemniej, nawet w tym wypadku możemy zdefiniować przydatną procedurę, która pozwoli zawsze znaleźć dowód dla sekwentu dowiedlnego (w wypadku sekwentu niedowiedlnego proces konstrukcji drzewa może się nigdy nie zakończyć).

Pierwszy dowód rozstrzygalności zdaniowej części logiki klasycznej i intuicjonistycznej został przedstawiony już przez Gentzena, ale LK i LJ nie były najlepszymi narzędziami do tego celu. Trudność polega na braku zbieżności LK (i LJ), który utrudnia konstrukcję prostej procedury szukania dowodu. Własność zbieżności RS sprowadza się do tego, że dowolne drzewo dla sekwentu dowiedlnego można poszerzyć w taki sposób, aby otrzymać jego dowód. Zatem w systemie zbieżnym każda próba poszukiwania dowodu sekwentu dowiedlnego musi zakończyć się sukcesem bez względu na zastosowaną kolejność wyboru reguł. Oczywiście, jeśli nie dyspo-

---

[6] Można wymienić wiele innych konsekwencji eliminacji cięcia, np. syntaktyczne dowody niesprzeczności i dowody twierdzeń o interpolacji (por. Takeuti 1987).

nujemy przemyślanymi strategiami wyboru kolejności stosowanych reguł, to nasz dowód może być wysoce nieekonomiczny, ale w końcu uda się go skonstruować.

Łatwo zauważyć, że LK i LJ nie są zbieżne: ze względu na multiplikatywną regułę (→⇒) i addytywne jednoprzesłankowe reguły dla koniunkcji i alternatywy możemy być zmuszeni do konstrukcji wielu drzew. Przykładowo, stosując (∧⇒) wstecz, musimy zadecydować, czy w sekwencie-przesłance umieścimy lewy, czy prawy argument koniunkcji. Zły wybór może doprowadzić do konstrukcji drzewa, które ma przynajmniej jedną gałąź niezaczynającą się sekwentem aksjomatycznym, ale to nie musi oznaczać, że wyjściowy sekwent jest niedowiedlny. Wybór drugiej możliwości może bowiem doprowadzić do konstrukcji dowodu. To oznacza, że w procesie konstrukcji drzewa musimy wrócić do etapu zastosowania tej reguły i wypróbować drugą możliwość.

2. Własność podformuł ma też związek z programem inferencjalizmu, w którym reguły logiczne są traktowane jako rodzaj operacyjnych definicji stałych logicznych (por. Indrzejczak 2014: 15). Jeden z warunków nakładanych na takie reguły to ich konserwatywność, czyli wymóg, aby żadna teza niezawierająca danej stałej nie była dowiedlna z wykorzystaniem reguł dla tej stałej. Poggiolesi (2011) definiuje ten warunek ogólnie dla dowolnego rachunku sekwentowego w następujący sposób: rachunek R' otrzymany z rachunku R przez dodanie reguł charakteryzujących co najmniej jedną nową stałą rozszerza konserwatywnie rachunek R wtedy i tylko wtedy, gdy w R' nie można dowieść żadnego sekwentu, który zawiera tylko stałe z R i nie jest w R dowiedlny. Oczywiście, jeżeli wszystkie reguły spełniają własność podformuł, to rachunek jest w tym sensie konserwatywny.

Omówione zyski płynące z eliminacji cięcia tłumaczą częściowo, dlaczego Gentzen nazwał ten wynik twierdzeniem głównym (*Hauptsatz*). Jego dowód pokazuje w dość skomplikowany sposób, przez podwójną (a właściwie potrójną) indukcję, jak dowolne drzewo zawierające zastosowanie (Cut) przekształcić w takie drzewo, które tej reguły nie wykorzystuje. Oprócz oryginalnego dowodu Gentzena zaproponowano potem wiele innych metod, m.in. w (Curry 1963), (Schütte 1977) i (Dragalin 1988)[7]. Wszystkie te dowody są konstruktywne w tym sensie, że pokazują krok po kroku, jak przekształcać dowód zawierający zastosowanie cięcia w taki, który go nie posiada. Nie pokazują jednak, w jaki sposób konstruować od początku dowód bez cięcia. Toteż w badaniach nad automatyzacją dowodzenia stosujemy inne podejście: zaczynamy od systemu, który reguły cięcia nie posiada, i bezpośrednio wykazujemy jego pełność przez zdefiniowanie odpowiedniej procedury poszukiwania dowodu, która albo daje gwarancję jego zbudowania, albo zapewnia materiał do zbudowania modelu falsyfikującego dla sekwentu niedowiedlnego. Przy takim podejściu jako produkt uboczny otrzymujemy niekonstruktywny semantyczny dowód eliminacji cięcia.

[7] Analizę różnych metod dowodzenia eliminacji cięcia znaleźć można w (Indrzejczak 2013).

Systemy RS, w których obowiązuje twierdzenie o eliminacji cięcia, są określane jako *cut-free* lub analityczne. Ten drugi termin ma wiele różnych znaczeń. W szczególności rachunek analityczny jest niekiedy definiowany jako taki, w którym to nie same reguły, lecz ich dopuszczalne zastosowania spełniają własność podformuł. W tym sensie możemy np. mówić o analitycznym cięciu, jeżeli nałożymy na (Cut) warunek, zgodnie z którym A to podformuła dowodzonego sekwentu. Takie analityczne RS zostały skonstruowane dla wielu logik modalnych, m.in. przez Takano (1992, por też. Fitting 1983, Goré 1999). Warto również zauważyć, że nie zawsze eliminacja cięcia gwarantuje analityczność rachunku, ponieważ może on zawierać inne kłopotliwe reguły, które nie spełniają własności podformuł.

4. CECHY REGUŁ

Własność podformuł nie jest jedyną ważną cechą przy konstruowaniu dobrego systemu dowodzenia. W szczególności można wspomnieć o następujących cechach (por. Avron 1996, Wansing 1998, Poggiolesi 2011, Indrzejczak 2013):

— eksplicytność: stała logiczna występuje tylko we wniosku; ponadto jeżeli występuje tam tylko raz, to jest to eksplicytność mocna;
— separowalność: schemat reguły dla danej stałej nie zawiera innych stałych logicznych;
— symetria: każda stała ma tylko reguły wprowadzania formuły z tą stałą do następnika lub poprzednika sekwentu; jeżeli ma obie, to jest to symetria mocna;
— niezależność: na zastosowanie reguły nie są nałożone żadne warunki ograniczające.

Łatwo sprawdzić, że reguły zdaniowe LK (i LJ) mają wszystkie te cechy. W wypadku reguł dla kwantyfikatorów dwie z nich nie spełniają warunku niezależności z racji ograniczenia dotyczącego podstawiania nowej zmiennej za zmienną kwantyfikowaną. Przy formalizacji sekwentowych dla wielu logik nieklasycznych jest jeszcze gorzej. Typowych przykładów dostarczają systemy RS dla logik modalnych. Na przykład, reguła wprowadzania funktora możliwości ◊ do poprzednika dla logiki modalnej S4 nie jest ani eksplicytna, ani separowalna, ponieważ ma następującą postać:

$$(\Diamond\Rightarrow) \qquad \frac{A, \Box X \Rightarrow \Diamond Y}{\Diamond A, \Box X \Rightarrow \Diamond Y}$$

gdzie $\Box X$ oznacza, że wszystkie elementy X są poprzedzone funktorem konieczności $\Box$, a $\Diamond Y$, że wszystkie elementy Y są poprzedzone funktorem możliwości ◊.

Wiele z tych własności jest pożądanych z czysto technicznego punktu widzenia, ponieważ ułatwiają dowody dużej liczby ważnych twierdzeń, np. eliminacji cięcia. Wprawdzie brak pewnych wymienionych wyżej cech nie zawsze uniemożliwia dowód tego twierdzenia, może go jednak znacznie komplikować. Np. sekwentowa formalizacja logiki modalnej S4 mimo wskazanych uchybień w konstrukcji reguł pozwala na eliminację cięcia, ale już w wypadku mocniejszego systemu S5 jest to niewykonalne.

Niektóre z omawianych cech są mocno związane z antyrealistyczną teorią znaczenia, omawianą dokładniej w (Indrzejczak 2014). Wyżej wspomnieliśmy w tym kontekście o związku własności podformuł z konserwatywnością. Przy syntaktycznym definiowaniu stałych za pomocą odpowiednio dobranych reguł często pojawia się wymóg zachodzenia harmonii w obrębie reguł systemu. Trudność polega na precyzyjnym ustaleniu warunków, które muszą być spełnione, aby można było uznać reguły za definicje stałych logicznych i uniknąć postawionego przez Priora tzw. problemu spójnika „tonk" (por. Indrzejczak 2014: 16-17). W jednej z ciekawszych propozycji korzysta się z pojęcia reguły kanonicznej i kryterium koherencji (Avron 2001).

5. UOGÓLNIONE RS

Ze względu na trudności z otrzymaniem zadowalających formalizacji wielu logik nieklasycznych stosunkowo szybko zaczęto poszukiwać uogólnionych form rachunków sekwentowych. Scharakteryzujmy dwie najważniejsze propozycje.

1. Rachunki ekspozycyjne (*Display Calculi*), wprowadzone przez Belnapa (1982) i rozwinięte m.in. w (Wansing 1998) i (Kracht 1996), wykorzystują dwa poziomy organizacji sekwentu i związanych z tym reguł. W rachunkach takich mamy (stały) zbiór reguł logicznych oraz (zmienny) zbiór reguł dla różnego rodzaju operacji strukturalnych. Te ostatnie pozwalają wykonywać rozmaite działania na strukturach danych w poprzedniku i następniku. W wyniku tych manipulacji możemy zawsze umieścić interesującą nas formułę jako jedyny element poprzednika lub następnika, czyli ją wyeksponować (stąd nazwa). Jest to niezbędne do stosowania reguł logicznych, ponieważ ich schematy zawsze wymagają, aby stosowna formuła-wniosek i jej przesłanki występowały w izolacji. Przykładowo, reguły dla implikacji wyglądają następująco:

$$(\to\Rightarrow) \qquad \frac{X \Rightarrow A \qquad B \Rightarrow Y}{A \to B \Rightarrow (*Y0X)} \qquad\qquad (\Rightarrow\to) \qquad \frac{X0A \Rightarrow B}{X \Rightarrow A \to B}$$

gdzie 0 oznacza dwuargumentową strukturalną stałą komponowania struktur, a * jednoargumentową stałą strukturalną przestawiania struktur (z poprzednika do następnika i odwrotnie). Zauważmy, że X, Y nie oznaczają tu (multi)zbiorów lub ciągów formuł, lecz struktury budowane z formuł przy użyciu stałych strukturalnych (A i B oznaczają formuły). Dla przykładu podajemy jeszcze trzy reguły strukturalne (a właściwie sześć, ponieważ wszystkie są obustronnie poprawne):

$$\frac{*X \Rightarrow Y}{*Y \Rightarrow X} \qquad \frac{X \Rightarrow **Y}{X \Rightarrow Y} \qquad \frac{X0Y \Rightarrow Z}{X \Rightarrow Z0*Y}$$

Ta własność ekspozycji reguł logicznych pozwala na bardzo zgrabny i ogólny dowód eliminacji cięcia. Niestety rachunki tego typu gorzej wypadają w roli narzędzi faktycznego szukania dowodu. Jest tak dlatego, że z powodu zazwyczaj znacznej liczby reguł charakteryzujących operacje strukturalne rachunki te nie spełniają własności podstruktur, czyli odpowiednika własności podformuł, ale dla operacji strukturalnych.

2. Rachunki hipersekwentowe, wprowadzone przez Pottingera w krótkiej nocie (Pottinger 1983), zostały rozwinięte przez Avrona (1987) dla wielu logik nieklasycznych (por. zwłaszcza Avron 1996). Oparte są na prostej idei używania skończonych zbiorów sekwentów (ew. multizbiorów lub ciągów) zamiast pojedynczych sekwentów. Hipersekwent ma zatem postać $X1 \Rightarrow Y1 \mid \ldots. \mid Xn \Rightarrow Yn$, gdzie składnikami są sekwenty oddzielone za pomocą |. Uogólnienie to pozwala na wprowadzenie dodatkowych reguł, za pomocą których można np. łączyć lub rozłączać sekwenty, ewentualnie przenosić w ramach hipersekwentu pewne formuły z jednego sekwentu do drugiego. Takie rozwiązanie okazało się niezwykle skuteczne przy formalizowaniu wielu logik nieklasycznych, które w ogóle nie miały standardowej formalizacji sekwentowej (jak niektóre logiki implikacji relewantnej) lub ich standardowe formalizacje nie spełniały pożądanych własności, zwłaszcza eliminacji cięcia. Przykładowo, logika modalna S5, która w standardowej formalizacji sekwentowej nie dopuszcza eliminacji cięcia, w hipersekwentowej wersji Avrona ma tę własność dzięki zastosowaniu reguły modalnego separowania o postaci:

$$\frac{G \mid \Box X, Y \Rightarrow \Box Z, W \mid H}{G \mid \Box X \Rightarrow \Box Z \mid Y \Rightarrow W \mid H}$$

gdzie G i H oznaczają (potencjalnie puste) ciągi sekwentów występujących po obu stronach sekwentu-przesłanki, który zostaje we wniosku rozbity na sekwent modalny (wszystkie formuły poprzedzone funktorem konieczności) i niemodalny.

Dwie omówione niestandardowe formy RS nie wyczerpują oczywiście bogactwa propozycji. Np. w celu formalizowania logik wielowartościowych wprowadzono sekwenty o liczbie argumentów większej od dwóch (Rousseau 1967, Carnielli 1991). Podstawowa idea jest taka, że dla logiki o *n* wartościach logicznych budujemy system, w którym reguły są zdefiniowane na sekwentach będących uporządkowanymi *n*-tkami (multi)zbiorów formuł, gdzie każdy argument odpowiada jednej z wartości logicznych. Takie rozwiązanie stosowano też do formalizowania logik temporalnych (por. Nishimura 1980), w których wprowadzono sekwenty złożone z sześciu argumentów (odpowiednio formuły prawdziwe lub fałszywe w przeszłości, teraźniejszości lub przyszłości).

Innym rozwiązaniem jest pochodzący od Curry'ego (1963) pomysł, by używać RS, w których występuje więcej niż jeden rodzaj sekwentu. Przykładowo, w logice modalnej można używać sekwentów klasycznych oraz modalnych różnego typu (por. Indrzejczak 1997). Ciekawym podejściem jest też posługiwanie się sekwentami o strukturze hierarchicznej, tzn. takimi, które w poprzedniku lub następniku mogą oprócz formuł zawierać inne sekwenty (a te z kolei jeszcze inne). Używanie tego typu zagnieżdżonych struktur okazało się skutecznym sposobem formalizacji np. logik temporalnych (por. Kashima 1994, Poggiolesi 2011). Jednak najpopularniejszym obecnie podejściem uogólniającym na gruncie RS jest stosowanie sekwentów, w których formuły są etykietowane. Jest to metoda kontrolowanego użycia wybranych elementów semantyki zakodowanych w syntaktyczny sposób. Etykietowane RS dla logik wielowartościowych omawia Hähnle (1994), a dla modalnych Negri (2005).

6. INTERPRETACJE SEKWENTÓW

Siła i bogactwo zastosowań rachunków sekwentowych w dużej mierze zależy od możliwości rozmaitego interpretowania samego pojęcia sekwentu. Rozważymy tu kilka z nich.

1. Oryginalna interpretacja Gentzena polegała na traktowaniu sekwentu postaci $A_1, \ldots, A_k \Rightarrow B_1, \ldots, B_n$ jako formuły postaci $A_1 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B_1 \vee \ldots \vee B_n$. W przypadku $k = 0$ mamy po prostu alternatywę $B_1 \vee \ldots \vee B_n$; w przypadku $n = 0$ mamy $A_1 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow \bot$ lub $\sim(A_1 \wedge \ldots \wedge A_k)$. Ten sposób interpretacji trywializuje pojęcie sekwentu, ale przydaje się w dowodach równoważności rachunków sekwentowych z systemami aksjomatycznymi.

2. Pamiętać należy o oryginalnej motywacji Gentzena, który wprowadził rachunki sekwentowe jako systemy pomocnicze w celu udowodnienia, że dowody w systemie dedukcji naturalnej można budować w postaci normalnej (por. Indrzejczak 2014). W tym ujęciu strzałka sekwentu odpowiada relacji dowiedlności w systemie dedukcji naturalnej. Pozwala to na dwie interpretacje sekwentu:

(1) (Co najmniej jedna) formuła z następnika zależy dedukcyjne od wszystkich formuł w poprzedniku jako od jej (aktywnych) założeń.

(2) Sekwent reprezentuje regułę inferencji z wszystkimi przesłankami w poprzedniku i wnioskiem jako jedną z formuł w następniku.

3. Jedną z popularniejszych interpretacji sekwentów można nazwać falsyfikacjonistyczną. Jest ona blisko związana z użyciem rachunków sekwentowych jako procedur poszukiwania dowodu. W takim ujęciu wszystkie elementy poprzednika traktujemy jako prawdziwe, a wszystkie elementy następnika jako fałszywe — przy pewnej interpretacji. Aksjomaty wyrażają zaś sprzeczność. Cała procedura szukania dowodu staje się tu raczej próbą wykazania fałszywości sekwentu dowodzonego, która jest udana, jeżeli przynajmniej jedna gałąź kończy się sekwentem nieaksjomatycznym. W wypadku klasycznej logiki zdań otrzymane w ten sposób drzewa dostarczają alternatywnej postaci normalnej dla sekwentu wyjściowego, w tym sensie, że każdy sekwent kończący jedną z gałęzi odpowiada elementarnej koniunkcji (zmienne z poprzednika i negacje zmiennych z następnika), a ich zbiór traktujemy jako alternatywę. Taka interpretacja sekwentów w naturalny sposób doprowadziła do powstania systemów tablicowych w stylu Hintikki (1955), uproszczonych (Beth 1955) i (Smullyan 1968).

4. Można też interpretować sekwenty w sposób dualny do omówionego wyżej, tj. jako wyrażające fałszywość elementów poprzednika i prawdziwość elementów następnika. W syntaktycznym ujęciu sekwenty wyrażają wtedy alternatywę zanegowanych elementów poprzednika i elementów następnika, a aksjomaty odpowiadają prawu wyłączonego środka. Można nazwać taką interpretację weryfikacjonistyczną. Wprowadzili ją niezależnie Schütte (1977) oraz Rasiowa i Sikorski (1963), konstruując dualne systemy tablicowe dla logiki klasycznej, rozciągnięte potem na wiele logik nieklasycznych przez Orłowską (Orłowska, Golińska-Pilarek 2011). W wypadku klasycznego rachunku zdań skończone drzewa odpowiadają koniunkcyjnym postaciom normalnym sekwentu wyjściowego[8], dokładnie tak jak w dowodzie pełności metodą Posta.

Warto zauważyć, że taka interpretacja dostarcza też teoretycznego uzasadnienia klasycznej rezolucji. Zaczynamy od wstępnego kroku generującego dla sprawdzanej formuły/sekwentu skończony zbiór klauzul (atomowych sekwentów), a następnie kolejno stosujemy do nich specjalną formę (Cut), zwaną regułą rezolucji, tak długo, aż otrzymamy pustą klauzulę (wyrażającą sprzeczność) w wypadku dowiedlnego sekwentu[9]. Automatyczna dedukcja oparta na tzw. metodzie koneksji (zob. Bibel 1993) jest w zasadzie w takiej samej relacji do systemów tablicowych omawianych w punkcie 3 jak rezolucja do dualnych systemów tablicowych.

7. RS A TEORIA KONSEKWENCJI

Interpretacja sekwentów omówiona w punkcie 2 prowadzi do pytań o związki między rachunkiem sekwentów a klasyczną teorią (operacji) konsekwencji (Tarski 1930). W tej ostatniej analizuje się własności operacji Cn, która zbiorom formuł przyporządkowuje zbiory formuł (ich konsekwencji); zatem dla dowolnego zbioru X i operacji Cn, przez Cn(X) rozumiemy zbiór Y, którego każdy element jest konsekwencją X (wynika, jest dedukowalny z X).

---

[8] Są to sekwenty rozpoczynające gałęzie jako elementarne alternatywy (klauzule) wzięte w koniunkcji.

[9] Inne interesujące powiązania między rezolucją, systemami tablicowymi a rachunkami sekwentowymi omawia Avron (1993).

Aby bezpośrednio scharakteryzować związki zachodzące między operacjami konsekwencji w sensie Tarskiego a relacjami konsekwencji generowanymi przez rachunki sekwentowe, wygodnie ograniczyć się do sekwentów intuicjonistycznych, czyli z (co najwyżej) jedną formułą w następniku. Wtedy sekwent $X \Rightarrow A$, w którym $\Rightarrow$ zinterpretujemy jako pewną relację konsekwencji $\vdash$ odpowiada stwierdzeniu, że $A \in Cn(X)$ (przy założeniu, że X to zbiór formuł). Sekwent $X \Rightarrow Y$ nie jest bowiem odpowiednikiem zapisu $Y \subseteq Cn(X)$: elementy następnika w sekwencie rozumiemy alternatywnie, a nie jako koniunkcję. Jak pokażemy, ma to określone następstwa.

Dwie cechy sekwentów Gentzena wskazują, że na podstawie RS można rozwinąć teorię relacji konsekwencji bogatszą od teorii Tarskiego. Po pierwsze, zamiast zbiorów w sekwentach można użyć multizbiorów lub ciągów. Po drugie, sekwenty dopuszczają więcej niż jedną formułę w następniku. Możliwe zyski związane z pierwszą możliwością omówimy w następnym paragrafie, obecnie skupimy się na drugiej kwestii. Scott (1974) jako pierwszy podjął problem porównania teorii konsekwencji Tarskiego z relacjami konsekwencji powstałymi na gruncie rachunków sekwentowych (z sekwentami jako parami zbiorów). Jego teorię rozwijało wielu autorów, którzy używali też rozmaitych nazw dla takich relacji: m.in. Shoesmith i Smiley (1978) (pod nazwą *multiple conclusion relations*), Zygmunt (1979), Czelakowski (1975) (pod nazwą *entailment relations*), Avron (1991) (*Scott relations*), Dunn i Hardegree (2001) (relacje symetryczne; Tarskiego — niesymetryczne). Scott (1974) zauważył, że:

1. Każda relacja $\vdash$ wyznaczona przez rachunek sekwentów, która spełnia warunki nałożone przez (Ax) (czyli zwrotność), (Cut) (czyli przechodniość) oraz (W) (czyli monotoniczność) wyznacza operację konsekwencji $Cn(X) = \{A: Y \vdash A\}$, gdzie Y to dowolny skończony podzbiór X.

2. Każda operacja konsekwencji Cn w sensie Tarskiego wyznacza klasę relacji konsekwencji $\vdash$, pośród których można scharakteryzować relację minimalną $\vdash$min i maksymalną $\vdash$max. X $\vdash$min Y zachodzi, gdy dla pewnego $A \in Y$ mamy $A \in Cn(X)$, czyli gdy $Cn(X) \cap Y \neq \emptyset$. Z kolei X $\vdash$max Y, gdy alternatywa (potencjalnie nieskończona) elementów $Y \subseteq Cn(X)$.

Ustalenia Scotta pokazują, że aparat teorii relacji konsekwencji Gentzenowskich może być bardziej subtelnym narzędziem badawczym niż teoria operacji konsekwencji Tarskiego, nawet jeżeli w tej pierwszej zastąpimy multizbiory czy ciągi zbiorami. Dunn i Hardegree (2001) podają też inne interesujące wzmocnienia rezultatów uzyskanych w wypadku operacji konsekwencji Tarskiego, a dotyczących generowania semantyk dla takich relacji. Każda relacja w sensie Tarskiego wyznacza semantykę, ale niekoniecznie jedną (por. Wójcicki 1988), podczas gdy z każdej relacji Scotta można wyprowadzić dokładnie jedną semantykę. Avron (1991) podaje następującą klasyfikację relacji konsekwencji:

— Dowolna relacja $\vdash$ na skończonych multizbiorach formuł spełniająca warunki zwrotności i przechodniości jest prostą relacją konsekwencji.

— Prosta relacja konsekwencji spełniająca warunek kontrakcji i jego konwers (czyli zdefiniowana na zbiorach) jest regularną relacją konsekwencji.

— Regularna relacja konsekwencji spełniająca warunek monotoniczności jest relacją konsekwencji w sensie Scotta.

— Regularna relacja konsekwencji spełniająca warunek monotoniczności, ale co najwyżej z jedną formułą w następniku, jest relacją konsekwencji w sensie Tarskiego.

Przechodząc od ogólnej teorii relacji konsekwencji do konkretnych logik, łatwo zauważyć, że aparat relacji konsekwencji Scotta pozwala też na bardzo naturalną i przejrzystą charakterystykę stałych logicznych. Np. podstawowe spójniki logiki klasycznej (w wersji multiplikatywnej) można scharakteryzować tak:

$X, A \vdash Y$	wtw	$X \vdash {\sim}A, Y$
$X, A, B \vdash Y$	wtw	$X, A \wedge B \vdash Y$
$X \vdash A, B, Y$	wtw	$X \vdash A \vee B, Y$
$X, A \vdash B, Y$	wtw	$X \vdash A \rightarrow B, Y$

Niezależnie od relacji konsekwencji generowanych przez rachunki sekwentowe można analizować też relacje konsekwencji zachodzące między sekwentami. Innymi słowy, interesują nas relacje wyznaczane nie przez $\Rightarrow$, lecz przez kreskę ułamkową oddzielającą sekwenty-przesłanki od sekwentów-wniosków w regułach danego rachunku. Takie podejście zostało rozwinięte przez logików hiszpańskich (m.in. Font i Jansana 1996) reprezentujących tzw. Szkołę Barcelońską.

8. LOGIKI PODSTRUKTURALNE

Chociaż w obrębie logiki klasycznej i jej rozszerzeń posługiwanie się zbiorami jako argumentami sekwentów pozwala upraszczać formalizację, to w wypadku logik nieklasycznych używanie ciągów — albo przynajmniej multizbiorów (które są wystarczające do większości zastosowań) — daje wiele korzyści. Okazało się, że dzięki odrzuceniu niektórych reguł strukturalnych można uzyskać sekwentowe formalizacje wielu interesujących logik nieklasycznych. Od lat dziewięćdziesiątych zwykło się je zbiorczo określać mianem logik podstrukturalnych, a intensywne badania nad nimi z wykorzystaniem rachunków sekwentowych przyniosły interesujące wyniki (por. Došen, Schroeder-Heister 1993, Paoli 2002). Co prawda wiele z tych logik, np. logiki relewantne, było znanych już wcześniej, ale użycie rachunków sekwentowych otworzyło nowe perspektywy w ich badaniach.

Zauważmy, że już w wypadku logiki intuicjonistycznej, jak również rozmaitych logik pośrednich (między intuicjonizmem a logiką klasyczną), jak np. logika Gödla–Dummetta, mamy do czynienia ze strukturalnym ograniczeniem. Dopuszczenie co najwyżej jednej formuły w następniku powoduje całkowite odrzucenie reguły kontrakcji w następniku, a reguła osłabiania jest tam dopuszczalna tylko w przypadku pustego następnika. W logikach implikacji relewantnej reguły osłabiania są całkowicie odrzucone, łatwo wskazać dlaczego. Przykładowo, prawo poprzedzania $p\to(q\to p)$, które — jako standardowy przykład braku relewancji — jest pomijane we wszystkich logikach implikacji relewantnej, jest łatwo dowiedlne przy użyciu osłabiania; wystarczy do aksjomatu $p \Rightarrow p$ dołączyć przez (W$\Rightarrow$) q w poprzedniku i dwukrotnie użyć ($\Rightarrow\to$).

Z kolei ograniczając stosowalność reguł kontrakcji, można otrzymać formalizację wielu logik wielowartościowych (por. Avron 1996, Prijatelj 1996). Całkowite odrzucenie kontrakcji daje nam formalizację tzw. logiki BCK. Jedna z najbardziej znanych logik podstrukturalnych — logika linearna, skonstruowana przez Girarda (1987) w celu analizowania zagadnień związanych z przetwarzaniem danych, nie zawiera ani reguł osłabiania, ani kontrakcji. Dla tych logik podstrukturalnych sekwenty zbudowane z multizbiorów (a w niektórych przypadkach nawet ze zbiorów) są wystarczające.

Formalizacje sekwentowe są również z powodzeniem stosowane w językoznawstwie matematycznym w celu modelowania różnych wariantów gramatyki kategorialnej wynalezionej przez Ajdukiewicza (1936). W rachunku kategorii syntaktycznych Lambeka (1993) potrzebne są sekwenty zbudowane z ciągów i zabroniona jest permutacja elementów. Co więcej, w słabszym wariancie nawet ciągi są zbyt mocne, ponieważ *implicite* zakładają łączność elementów (tzn. nie jest istotne, w jaki sposób zastosujemy nawiasy), a w rezultacie trzeba używać sekwentów budowanych z innych struktur. Mamy tu faktycznie do czynienia z sekwentami podobnymi do używanych w rachunkach ekspozycyjnych omówionych w paragrafie 5. Dobry przegląd sekwentowych formalizacji rozmaitych logik podstrukturalnych zawiera (Paoli 2002).

* * *

W krótkim szkicu osiemdziesięcioletniej historii rachunku sekwentów trudno nawet pobieżnie omówić wszystkie ich zastosowania. W szczególności programowo pominęliśmy bardzo zaawansowane gałęzie teorii dowodu. Zainteresowany czytelnik powinien zajrzeć do takich prac, jak (Pohlers 2009).

BIBLIOGRAFIA

Ajdukiewicz K. (1936), *Die Syntaktische Konnexität*, „Studia Philosophica" 1, 1-27.

Anderson A., Belnap N. (1975), *Entailment*, t.1, Princeton (NJ): Princeton University Press.

Avron A. (1987), *A Constructive Analysis of RM*, „Journal of Symbolic Logic" 52(4), 939-951.

Avron A. (1991), *Simple Consequence Relations*, „Information and Computation" 92(1), 105-139.

Avron A. (1993), *Gentzen-Type Systems, Resolution and Tableaux*, „Journal of Automated Reasoning" 10(2), 265-281.

Avron A. (1996), *The Method of Hypersequents in the Proof Theory of Propositional Non-Classical Logic* [w:] *Logic. From Foundations to Applications*, W. Hodges i in. (red.), Oxford: Clarendon Press, 1-32.

Avron A., Lev I. (2001), *Canonical Propositional Gentzen-Type Systems* [w:] *Automated Reasoning. First International Joint Conference, IJCAR 2001, Siena, Italy, June 2001, Proceedings*, R. Goré, A. Leitsch, T. Nipkov (red.), Berlin: Springer, 529-544.

Belnap N. (1982), *Display Logic*, „Journal of Philosophical Logic" 11(4), 375-417.

Beth E. W. (1955), *Semantic Entailment and Formal Derivability*, Amsterdam: North-Holland.

Bibel W. (1993), *Deduction, Automated Logic*, London: Academic Press.

Carnielli W. A. (1991), *On Sequents and Tableaux for Many-Valued Logics*, „Journal of Non-Classical Logic" 8(1), 59-76.

Curry H. (1963), *Foundations of Mathematical Logic*, New York (NY): McGraw-Hill.

Czelakowski J. (1975), *Some Theorems on Structural Entailment Relations*, „Studia Logica" 42(4): 417-430.

Došen K., Schroeder-Heister P. J. (red.) (1993), *Substructural Logics*, Oxford: Clarendon Press.

Dragalin A. (1988), *Mathematical Intuitionism. Introduction to Proof Theory*, Providence (RI): American Mathematical Society.

Dunn J. M., Hardegree G. M. (2001), *Algebraic Methods in Philosophical Logic*, Oxford: Clarendon Press.

Fitting M. (1983), *Proof Methods for Modal and Intuitionistic Logic*, Reidel: Dordrecht.

Font J., Jansana R. (1996), *A General Algebraic Semantics for Sentential Logics*, Berlin: Springer.

Gentzen G. (1934-1935), *Untersuchungen über das Logische Schließen*, I i II, „Mathematische Zeitschrift" 39(2), 176-210 i 39(3), 405-431.

Gentzen G. (1936), *Die Widerspruchsfreiheit der Reinen Zahlentheorie*, „Mathematische Annalen" 112, 493-565.

Gentzen G. (1938), *Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie*, „Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften, neue Folge" 4, 19-44.

Gentzen G. (1969), *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, M. Szabo (red.), Amsterdam: North-Holland.

Girard J. Y. (1987), *Linear Logic*, „Theoretical Computer Science" 50(1): 1-101.

Goré R. (1999), *Tableau Methods for Modal and Temporal Logics* [w:] *Handbook of Tableau Methods*, M. D'Agostino, D. M. Gabbay, R. Hähnle, J. Posegga (red.), Dordrecht: Kluwer, 297-396.

Hasenjaeger G. (1962), *Einführung in die Grundbegriffe und Probleme der Modernen Logik*, Freiburg: K. Alber.

Hähnle R. (1994), *Automated Deduction in Multiple-Valued Logics*, Oxford: Oxford University Press.

Hermes H. (1963), *Einführung in die Mathematische Logik*, Stuttgart: Teubner.

Hertz P. (1929), *Über Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme*, „Mathematische Annalen" 101(1), 457-514.

Hintikka J. (1955), *Form and Content in Quantification Theory*, „Acta Philosophica Fennica" 8, 11-55.

Indrzejczak A. (1997), *Generalised Sequent Calculus for Propositional Modal Logics*, „Logica Trianguli" 1, 15-31.

Indrzejczak A. (2013), *Rachunki sekwentowe w logice klasycznej*, Łódź: Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego.

Indrzejczak A. (2014), *Powstanie i ewolucja dedukcji naturalnej*, „Filozofia Nauki" 22(2) [86], 5-19.

Kanger S. (1957), *Provability in Logic*, Stockholm: Almqvist & Wiksell.

Kashima R. (1994), *Cut-Free Sequent Calculi for Some Tense Logics*, „Studia Logica" 53(1), 119-135.

Ketonen O. (1944), *Untersuchungen zum Prädikatenkalkül*, Helsinki: Suomalainen Tiedeakatemia.

Kleene S. (1952), *Introduction to Metamathematics*, Amsterdam: North Holland.

Kracht M. (1996), *Power and Weakness of the Modal Display Calculus* [w:] *Proof Theory of Modal Logic*, H. Wansing (red.), Dordrecht: Kluwer, 93-121.

Lambek J. (1993), *Logic without Structural Rules (Another Look at Cut Elimination)* [w:] Došen, Schroeder-Heister 1993: 179-206.

Negri S. (2005), *Proof Analysis in Modal Logic*, „Journal of Philosophical Logic" 34(5-6): 507-544.

Negri S., von Plato J. (2001), *Structural Proof Theory*, Cambridge: Cambridge University Press.

Negri S., von Plato J. (2011), *Proof Analysis*, Cambridge: Cambridge University Press.

Nishimura H. (1980), *A Study of Some Tense Logics by Gentze's Sequential Method*, „Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University" 16, 343-353.

Ohnishi M., Matsumoto K. (1957), *Gentzen Method in Modal Calculi*, „Osaka Mathematical Journal" 9(2): 113-130.

Ono K. (1938), *Logische Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik*, „Journal of the Faculty of Science, Imperial University of Tokyo" I, 3, 7, 329-389.

Orłowska E., Golińska-Pilarek J. (2011), *Dual Tableaux. Foundations, Methodology, Case Studies*, Dordrecht: Springer.

Paoli F. (2002), *Substructural Logics. A Primer*, Dordrecht: Kluwer.

Poggiolesi F. (2011), *Gentzen Calculi for Modal Propositional Logic*, Dordrecht: Springer.

Pohlers W. (2009), *Proof Theory. The First Step into Impredicativity*, Berlin: Springer.

Pottinger G. (1983), *Uniform Cut-Free Formulation of T, S4 and S5* (abstract), „Journal of Symbolic Logic" 48: 900-901.

Prijatelj A. (1996), *Bounded Contraction and Gentzen-Style Formulation of Łukasiewicz Logics*, „Studia Logica" 57(2-3): 437-456.

Rasiowa H., Sikorski R. (1963), *The Mathematics of Metamathematics*, Warszawa: Pańswowe Wydawnictwo Naukowe.

Rousseau G. (1967), *Sequents in Many Valued Logic*, „Fundamenta Mathematicae" 40, 23-33.

Schütte K. (1977), *Proof Theory*, Berlin: Springer.

Scott D. (1974), *Rules and Derived Rules* [w:] *Logical Theory and Semantical Analysis*, S. Stenlund (red.), Dordrecht: Reidel, 147-161.

Shoesmith D., Smiley T. (1978), *Multiple-Conclusion Logic*, Cambridge: Cambridge University Press.

Smullyan R. M. (1968), *First-Order Logic*, Berlin: Springer.

Takano M. (1992), *Subformula Property as a Substitute for Cut-Elimination in Modal Propositional Logics*, „Mathematica Japonica" 37(6): 1129-1145.

Takeuti G. (1987), *Proof Theory*, Amsterdam: North-Holland.

Tarski A. (1930), *Fundamentale Begriffe der Methodologie der Deduktiven Wissenschaften*, „Monatshefte für Mathematik und Physik" 37(1), 361-404.

Troelstra A. S., Schwichtenberg H. (1996), *Basic Proof Theory*, Cambridge: Cambridge University Press.

Wang H. (1960), *Toward Mechanical Mathematics*, „IBM Journal of Research and Development" 4(1), 2-22.

Wansing H. (1998), *Displaying Modal Logics*, Kluwer: Dordrecht.

Wójcicki R. (1988), *Theory of Logical Calculi*, Kluwer: Dordrecht.

Zygmunt J. (1979), *Entailment Relations on Logical Matrices*, „Bulletin of the Section of Logic" 8(2), 112-115.