Filozofia Nauki
Rok XXI, 2013, Nr 1(81)

Roman Murawski

Kilka uwag o dowodzie w matematyce[1]

Na ogół przyjmuje się, że podstawową metodę uzasadniania w matematyce stanowi dowód. Każde twierdzenie powinno zostać udowodnione, dowód jest właściwie jedyną używaną i akceptowaną metodą przekonania innych, czy to słuchaczy, czy czytelników o prawdziwości danej tezy. Tylko stwierdzenia zaopatrzone w dowód mogą być zaliczone do korpusu wiedzy matematycznej. Ani autorytet, ani eksperyment nie są tu dopuszczalne czy akceptowalne — przynajmniej teoretycznie. Czym właściwie jest jednak dowód w matematyce? Co znaczy udowodnić jakieś twierdzenie? Czy znaczy to przekonać specjalistów w danej dziedzinie o prawdziwości rozważanego stwierdzenia, czy może chodzi o podanie dowodu w sensie, w jakim pojęcie to funkcjonuje w logice matematycznej?

Zauważmy, że model uprawiania matematyki, w którym każdą głoszoną tezę należy zaopatrzyć w dowód, pojawił się dopiero około IV wieku p.n.e. w starożytnej Grecji. Ani w starożytnym Egipcie, ani w starożytnej Babilonii nie wymagano dowodów. W żadnej z tych kultur, w których przecież matematyka była na stosunkowo wysokim poziomie (zwłaszcza w Babilonii), nie odczuwano potrzeby uzasadniania prawd. W istocie nie było w nich żadnych tez ogólnych, nie było też prób wyprowadzania jednych zdań z innych czy wyjaśniania, dlaczego są one prawdziwe. Podobnie było też w matematyce chińskiej.

Dowód jako dedukcja z pewnych wyraźnie sformułowanych założeń to dzieło Greków. Wiązało się to z metodą aksjomatyczną. Od Platona, Arystotelesa i Euklidesa metoda aksjomatyczna uważana była za najlepszą metodę uzasadniania i porządkowania wiedzy matematycznej. Pierwszym dojrzałym i najbardziej dla matematyki greckiej reprezentatywnym przykładem zastosowania tej metody są *Elementy* Eukli-

[1] Praca powstała w ramach programu badawczego Narodowego Centrum Nauki (Grant N N101 136940).

desa. Ustanowiły one pewien wzorzec teorii naukowej i paradygmat matematyki. Od czasów Euklidesa aż do końca XIX wieku matematyka była w zasadzie uprawiana i przedstawiana w postaci teorii aksjomatycznej (w praktyce raczej quasi-aksjomatycznej) opartej na — zgodnie z zasadami metodologicznymi wypracowanymi przez Arystotelesa — aksjomatach, postulatach i definicjach.

Przypomnijmy, że jako aksjomaty traktowano wspólne wszystkim naukom pewne ogólne zasady, niezależnie od tego, o czym one traktują (odpowiadały one w zasadzie temu, co dziś nazywa się aksjomatami logicznymi i aksjomatami identyczności). Postulaty były to swoiste zasady mówiące o zakładanych własnościach specyficznych obiektów badanych przez daną teorię — na przykład swoiste własności liczb naturalnych w przypadku arytmetyki czy własności tworów geometrycznych w geometrii. Definicje z kolei miały ustalać znaczenie używanych terminów — w praktyce były to wyjaśnienia pojęć, a nie definicje w ścisłym sensie, co więcej, wyjaśnienia te były formułowane w nieprecyzyjnym języku potocznym. Nie wyodrębniano żadnych terminów pierwotnych, a język teorii nie był w żaden sposób oddzielony od języka potocznego. W praktyce budowane dowody zawierały rozmaite luki: listy aksjomatów czy postulatów nie były kompletne, swobodnie używano w dowodach różnych „oczywistych" prawd lub też odwoływano się do intuicji. W konsekwencji dowody były tylko częściowo oparte na aksjomatach i postulatach. Były nieformalne i intuicyjne, były raczej argumentacjami za słusznością głoszonej tezy, a samo pojęcie dowodu miało charakter psychologiczny i socjologiczny, a nie (czysto) logiczny.

Należy wyraźnie zauważyć, że nie podejmowano żadnych prób precyzacji i specyfikacji języka teorii — jak powiedziano wyżej, teorie formułowano w zwykłym języku potocznym z wszystkimi jego ułomnościami. Co więcej, aż po wiek XIX matematycy byli przekonani, że aksjomaty i postulaty teorii matematycznych winny być zdaniami prawdziwymi, tzn. winny dokładnie opisywać rzeczywisty stan rzeczy w świecie matematycznym. Wydaje się, że przekonanie to wiązało się z Arystotelesowskim poglądem, iż udowodnić zdanie, czyli wykazać, że jest prawdziwe, to tyle co pokazać, że jest ono logiczną konsekwencją zdań uznanych już wcześniej za prawdziwe. Udowodnienie zdania pojmowano więc jako wydedukowanie go z pewnych przesłanek, o których wiadomo, że są prawdziwe, samą zaś dedukcję pojmowano jako ciąg bezpośrednich inferencji.

Trzeba jednak zauważyć, że opisane podejście Euklidesa (związane z idealizmem Platona i z metodologią Arystotelesa) do kwestii rozwijania i budowania matematyki jako nauki oraz do uzasadniania jej tez, tzn. uzasadniania przez dedukcję (za pomocą dowodów), opierając się na wyraźnie sformułowanych aksjomatach i postulatach nie było jedynym podejściem i jedyną metodą funkcjonującą w starożytnej matematyce greckiej (i później). Inne podejście — nazwijmy je heurystycznym — związane było z materializmem demokrytejskim. Stosował go na przykład Archimedes — w istocie używał on nie tylko dedukcji, lecz także wszelkich metod takich jak intuicja czy nawet eksperyment (i to nie tylko eksperyment myślowy) w rozwiązywaniu problemów. Można to dostrzec choćby w jego rozważaniach związanych z obliczaniem objętości kuli za pomocą walca z dwoma wydrążonymi stożkami czy w kwadraturze paraboli.[2]

Choć podejście Euklidesowe zwyciężyło i przyjęło rolę dominującą w historii matematyki, trzeba wyraźnie powiedzieć, że stanowiło ono raczej pewien ideał, do którego dążono, a nie rzeczywistą praktykę naukową matematyków. Ścisła matematyka dedukcyjna była czymś raczej rzadkim. Przeciwnie, to intuicja i rozumowania heurystyczne stanowiły siłę napędową matematycznej praktyki badawczej. Ta energiczna, ale rzadko wystarczająco ścisła aktywność matematyczna prowadziła niejednokrotnie do kryzysów — wystarczy wspomnieć odkrycie przez Pitagorejczyków wielkości niewspółmiernych (co wstrząsnęło nie tylko ówczesną matematyką, lecz także całym Pitagorejskim spojrzeniem i pojmowaniem świata), trudności Leibniza i Newtona z wyjaśnieniem natury wielkości infinitezymalnych, „dowód" Fouriera, że każda funkcja może być przedstawiona w postaci szeregu Fouriera czy wreszcie antynomie w teorii mnogości opartej tylko na nieprecyzyjnym i intuicyjnym Cantorowskim pojęciu zbioru.

Nowe elementy pojawiły się w XIX wieku wraz z prądem, który stawiał sobie za cel wyjaśnienie podstawowych pojęć matematyki, a zwłaszcza pojęć analizy matematycznej — badania idące w tym kierunku podjęli w szczególności Cauchy, Weierstrass, Bolzano, Dedekind. Nurt ten nazywa się w literaturze arytmetyzacją analizy, ponieważ chodziło w nim przede wszystkim o wyjaśnienie fundamentalnych pojęć analizy matematycznej przez sprowadzenie ich do arytmetyki liczb naturalnych, która wydawała się prostsza i lepiej ugruntowana. Innym czynnikiem stymulującym poszukiwania było wykrycie antynomii, szczególnie na gruncie teorii mnogości (Burali-Forte, Cantor, Russell) oraz odkrycie antynomii semantycznych (Berry, Grelling). Odkrycia te wymusiły rewizję pewnych podstawowych idei matematyki. Wśród zaproponowanych rozwiązań trudności i problemów był m.in. program formalistyczny Davida Hilberta i związana z nim teoria dowodu (*Beweistheorie*). Należy wyraźnie podkreślić przy okazji, że „program ten nie był nigdy pomyślany jako całościowa filozofia matematyki; jego celem było usankcjonowanie i uzasadnienie całego korpusu wiedzy matematycznej" (por. Rowe 1989, s. 200).

Główną rolę w programie Hilberta odgrywało pojęcie dowodu formalnego. Wprowadzenie go było możliwe dzięki logice matematycznej zbudowanej i rozwiniętej w XIX wieku w szczególności przez Gottloba Fregego, który skonstruował pierwszy sformalizowany system aksjomatyczny — był to implikacyjno-negacyjny system rachunku zdań. Badania zapoczątkowane przez Hilberta, a prowadzone dalej przez niego samego i jego uczniów doprowadziły do stworzenia nowej dyscypliny

[2] Zagadnieniem obliczania objętości kuli zajmował się Archimedes w pracy *O kuli i walcu*. Kwadraturę paraboli rozważał natomiast w pracy *Kwadratura paraboli*. To ostatnie zagadnienie polega na zmierzeniu pola odcinka paraboli, czyli figury ograniczonej przez parabolę i jej cięciwę. Więcej informacji na temat stosowanych przez Archimedesa metod w obu tych zagadnieniach znaleźć można na przykład w książce Kordosa (1994). Zob. też paragraf 3.3 książki Bedürftiga i Murawskiego (2012).

zwanej metamatematyką. Jej celem było badanie teorii matematycznych i ich własności metodami matematycznymi.

Zauważmy, że pojęcie dowodu formalnego musi być zrelatywizowane do danej teorii. Aby móc taką teorię zbudować, należy najpierw ustalić jej język. Przy tym reguły konstrukcji wyrażeń takiego języka muszą mieć charakter ściśle formalny i syntaktyczny, tzn. mogą odwoływać się jedynie do kształtu i formy symboli przy całkowitym abstrahowaniu od ich znaczenia czy interpretacji. Następnie należy ustalić aksjomaty (logiczne, pozalogiczne i zwykle także aksjomaty identyczności) oraz reguły wnioskowania. Te ostatnie muszą mieć znów w pełni charakter syntaktyczny i formalny. Dowód formalny formuły φ definiuje się teraz jako skończony taki ciąg formuł wyrażonych w języku rozważanej teorii $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, że ostatni element tego ciągu jest identyczny z formułą dowodzoną φ, wszystkie zaś jego wyrazy albo należą do ustalonego na początku zbioru aksjomatów, albo są konsekwencjami wyrazów wcześniejszych zgodnie z którąś z przyjętych na początku reguł wnioskowania. Zauważmy, że takie pojęcie dowodu formalnego ma w pełni charakter syntaktyczny i nie odwołuje się do żadnych pojęć semantycznych takich, jak znaczenie czy interpretacja.

Wynikiem opisanych procesów jest m.in. to, że dziś w matematyce mamy do czynienia z co najmniej dwoma pojęciami dowodu: z jednej strony z dowodami formalnymi stosowanymi głównie w logice i podstawach matematyki oraz „normalnymi", „zwykłymi" dowodami stosowanymi w praktyce badawczej. Można więc zapytać o to, jakie są związki i relacje między nimi. W szczególności zapytać należy, czy logiczne pojęcie dowodu formalnego jest precyzacją „zwykłego", niesformalizowanego pojęcia dowodu, którym posługują się matematycy? Czy pełnią one podobne role w matematyce? W jakim stopniu pojęcie dowodu sformalizowanego odzwierciedla zasadnicze cechy i naturę dowodu nieformalnego stosowanego przez matematyków w ich praktyce badawczej?

Zauważmy przede wszystkim, że pojęcie dowodu formalnego, po jego pojawieniu się w logice i podstawach matematyki, nie zastąpiło dowodów nieformalnych — te ostatnie nie zniknęły przecież z matematyki. Istotnie, matematyka jak była, tak nadal jest rozwijana i budowana w sposób niesformalizowany z użyciem intuicji i rozumowań heurystycznych — jest dalej rozwijana w istocie w duchu Euklidesa (czasami w duchu Archimedesa) w sposób quasi-aksjomatyczny. Co więcej, rozumowania nieformalne występują nie tylko w kontekście odkrycia, ale także w kontekście uzasadnienia. Każda poprawna metoda może być użyta, by uzasadnić rozważaną tezę. Co to jednak znaczy „metoda poprawna"? W praktyce badawczej decyduje o tym społeczność matematyków. Zauważmy jednak, że kryteria poprawności zmieniały się w historii matematyki. Zasadniczym celem „normalnych" matematyków jest przekonanie słuchaczy, czytelników i specjalistów w danej dziedzinie, że rozważany wynik jest uzasadniony, poprawny i prawdziwy (te cechy rozumiane są w sposób intuicyjny i nie do końca ściśle sprecyzowany), a nie odpowiedź na pytanie, czy dana teza może być wydedukowana z przyjętych aksjomatów. Ostatecznym celem matematyki jest

„dostarczyć poprawnych dowodów prawdziwych twierdzeń” (Avigad 2006, s. 105). W praktyce badawczej matematyków nie rozróżnia się zwykle pojęć „prawdziwy” i „dowodliwy” — są one często wzajemnie zastępowane. Matematycy zwykli mawiać, że dane twierdzenie zachodzi albo że jest prawdziwe, a nie, że jest dowodliwe w takiej to a takiej teorii. Aksjomaty rozwiniętych teorii matematycznych nie zawsze są precyzyjnie sformułowane, a dopuszczalne metody dokładnie opisane.

Dowody odgrywają rozmaite role w praktyce badawczej w matematyce. Można wyróżnić następujące role: (1) weryfikacja, (2) wyjaśnianie, (3) systematyzacja, (4) odkrywanie, (5) wyzwanie intelektualne, (6) komunikowanie, (7) uzasadnianie definicji (por. de Villiers 1999 i CadwalladerOlsker 2011). Najbliższa matematykom-badaczom jest oczywiście weryfikacja — dane stwierdzenie może zostać zaliczone do korpusu wiedzy matematycznej jedynie wtedy, gdy zostało *zweryfikowane*. Dowód powinien przy tym nie tylko pokazać, że rozważane zdanie jest prawdziwe i zachodzi, lecz także powinien *wyjaśnić*, dlaczego jest ono prawdziwe i zachodzi. To tłumaczy, dlaczego matematycy często szukają nowych dowodów znanych już twierdzeń — nowe dowody powinny mieć większą moc wyjaśniającą. Rola dowodów polegająca na systematyzacji wiedzy widoczna jest już w *Elementach* Euklidesa. W dziele tym przecież zgromadzono wiele twierdzeń znanych Grekom, uporządkowano je i usystematyzowano w taki sposób, że wynikały z aksjomatów, postulatów i definicji oraz twierdzeń wcześniej już udowodnionych. Pokazano w ten sposób, że przyjęte aksjomaty, postulaty i definicje tworzą wystarczającą podstawę, na której można rozwinąć cały gmach matematyki.

Zauważmy, że choć rzadko przypisuje się dowodom rolę odkrywania, to jednak pełnią one i taką rolę. Istotnie, wystarczy zauważyć, że na przykład geometrie nieeuklidesowe zbudowane w XIX wieku powstały w wyniku nieudanych prób wydedukowania piątego postulatu Euklidesa z pozostałych aksjomatów i postulatów I Księgi *Elementów*. Zagadnienie to nurtowało matematyków od starożytności greckiej. W końcu udało się pokazać, że możliwe są niesprzeczne systemy geometrii przyjmujące negację piątego postulatu.

Szukanie dowodów stanowi z pewnością wezwanie intelektualne dla matematyków: oto jest twierdzenie — chcemy je udowodnić. Dowody służą w społeczności matematyków także jako środek komunikacji. Pozwalają one nie tylko przekazać racje, dla których dane stwierdzenie może być traktowane jako prawdziwa teza, lecz także metody, które być może mogą zostać zastosowane w innych kontekstach i w innych dziedzinach. Dowody mogą stanowić także uzasadnienie trafności definicji.

Najważniejszymi w praktyce badawczej matematyków funkcjami pełnionymi przez dowody są oczywiście weryfikacja i wyjaśnianie. Zauważmy, że dowód, który weryfikuje dane twierdzenie, nie musi koniecznie wyjaśniać, dlaczego ono zachodzi. Należy odróżnić dowody, które przekonują, że dana teza zachodzi czy że jest prawdziwa i w związku z tym może zostać zaakceptowana, od dowodów, które wyjaśniają, dlaczego tak jest. Są rzecz jasna także dowody, które jednocześnie przekonują i wyjaśniają. Dowód, który wyjaśnia, powinien dać wgląd w istotę rzeczy, podczas gdy dowód, który ma przekonać słuchacza czy czytelnika, powinien być zwięzły lub ogólny. Należy też odróżnić wyjaśnienie, dlaczego rozważana teza zachodzi, od zrozumienia, dlaczego tak jest. Matematycy często traktują prostotę jako cechę istotną potrzebną do zrozumienia. Zauważmy, że jak pisze Rota w (1997, s. 192):

> jest właściwie artykułem wiary wśród matematyków, że po odkryciu nowego twierdzenia, pojawi się inny, prostszy jego dowód aż ostateczny dowód nie zostanie znaleziony.

Można przytoczyć wiele przykładów z historii matematyki na poparcie tej tezy. W tym kontekście warto wspomnieć Paula Erdősa i jego ideę dowodów z Księgi, w której Bóg umieścił doskonałe dowody twierdzeń matematycznych. Erdős nawiązuje tu do *dictum* Hardy'ego, który twierdził, że w matematyce nie ma żadnego stałego miejsca dla brzydkich dowodów. Erdős podkreślał przy tym, że niekoniecznie trzeba wierzyć w Boga, ale matematyk powinien wierzyć w Księgę.[3]

Zauważmy, że dowód, który przekonuje słuchaczy czy czytelników o słuszności danej tezy, może być mniej lub bardziej formalny. Dowody wyjaśniające nie mogą być natomiast ściśle formalne. Matematycy cenią i przywiązują duże znaczenie do dowodów wyjaśniających.[4] Dowód taki jest bardziej ceniony wtedy, gdy „pokazuje metody, które są silne i niosą dużo informacji" (por. Avigad 2006, s. 106). Hersh pisze w (1997, s. 60), że „dowód stanowi narzędzie w służbie badań a nie jarzmo [nakładane] na wyobraźnię matematyka".

Można zweryfikować twierdzenie dzięki rozważeniu i sprawdzeniu wszystkich poszczególnych przypadków — to jednak nie daje na ogół wyjaśnienia, dlaczego ono zachodzi. Wyjaśnienie powinno dać ogólną zasadę, na mocy której dane twierdzenie jest prawdziwe. Jednym z przykładów twierdzenia sprawdzonego przez rozważenie i zweryfikowanie przypadków jest słynne twierdzenie o czterech barwach udowodnione przez Appela i Hakena, a głoszące, że każdy graf planarny daje się pokolorować czterema barwami, tzn. że cztery barwy wystarczą, by pokolorować każdą mapę na płaszczyźnie w taki sposób, by dwa kraje sąsiadujące z sobą zostały pomalowane na inne kolory. Przykład tego twierdzenia wskazuje także inne cechy dowodów w matematyce. Zauważmy, że pierwszy sensowny dowód tego twierdzenia podany w roku 1879 przez Kempe'ego był akceptowany przez całą dekadę, dopóki nie odkryto, że jest niepoprawny. Nie był to ani pierwszy, ani ostatni taki wypadek w historii matematyki. Pokazuje to, że społeczność matematyków może się mylić w ocenie poprawności dowodów.

Twierdzenie o czterech barwach zwraca też uwagę na inną jeszcze sprawę, a mianowicie na kwestię akceptowalnych i dopuszczalnych metod dowodowych czy metod stosowanych w weryfikacji poszczególnych przypadków. Jedyny znany do dziś

[3] W 1998 roku Springer Verlag opublikował książkę *Proofs From The Book* autorstwa Aignera i Zieglera. Autorzy przyznają we *Wstępie*, że traktują ją jako „pierwsze (i bardzo skromne) przybliżenie Księgi".

[4] Na temat wyjaśniania w matematyce zob. na przykład Steiner (1978) czy Mancosu (2000) oraz (2001).

dowód tego twierdzenia — dowód Appela i Hakena — został otrzymany przy użyciu komputera. Nie znamy dotąd żadnego dowodu tradycyjnego, tzn. niestosującego komputera. Co więcej, dowód Appela i Hakena nie mógłby zostać przeprowadzony przez człowieka, ponieważ istotną jego część stanowią obliczenia, na których wykonanie potrzeba około 1200 godzin pracy komputera, co jest poza zasięgiem jakiegokolwiek matematyka. Fakt ten zapoczątkował dyskusję dotyczącą dopuszczalności metod eksperymentalnych w dowodach matematycznych. Sformułowano szereg argumentów za i przeciw — nie możemy tu wchodzić w szczegóły tych rozważań (zob. w tej sprawie Bondecka-Krzykowska 1999). Powiedzmy więc tylko, że stosowanie narzędzi technicznych — takich jak dla przykładu komputer — w dowodzeniu twierdzeń matematycznych wydaje się podważać akceptowaną powszechnie tezę o aprioryczności wiedzy matematycznej. Powstaje więc problem, czy dowód wspomagany komputerowo jest (czy może być) traktowany jako dowód matematyczny i w konsekwencji, czy należy mówić o twierdzeniu o czterech barwach czy też tylko o (mniej czy bardziej zweryfikowanej) hipotezie o czterech barwach.

W dyskusji na temat dopuszczalności komputerów w dowodzeniu twierdzeń matematycznych zainicjowanej artykułem Tymoczki (1979) postawiono pytanie o istotne cechy „normalnego" dowodu matematycznego. Tymoczko twierdzi, że dowód matematyczny powinien być: (1) przekonujący społeczność matematyków, (2) powinien dać się przejrzeć i sprawdzić, (3) powinien dać się sformalizować. Pierwszy wymóg ma charakter „antropologiczny", jak pisze Tymoczko, pozostałe dwa traktuje on jako cechy istotne i głębokie. Twierdzi, że

> możność przejrzenia i sprawdzenia oraz to, że [dowód] daje się sformalizować mogą być traktowane jako dwie strony tej samej monety (1979, s. 61).

Cecha poddawania się formalizacji jest „idealizacją cechy drugiej, sprowadza ją do skończonej liczby prostych przejrzystych kroków" (*ibidem*). Można założyć, że każdy dowód, który daje się przejrzeć i sprawdzić, może też zostać sformalizowany. Ale czy wszystkie dowody dające się sformalizować dają się przejrzeć i sprawdzić? Tymoczko odpowiada na to pytanie negatywnie, pisząc:

> Wiadomo, że muszą istnieć dowody formalne, które nie dają się przejrzeć i sprawdzić choćby z tego powodu, że są zbyt długie lub też zawierają zbyt długie formuły. Zwrot „zbyt długi" znaczy tu: „nie dający się przeczytać przez matematyka w ciągu całego jego życia" (*ibidem*).

Z drugiej strony należy zauważyć, że

> nie jest wcale oczywiste, iż matematycy mogą mówić o dowodach formalnych i rozpoznawać je jako takie, nie będąc jednocześnie w stanie przejrzeć ich i sprawdzić (Tymoczko 1979, s. 62).

Mówiąc o tym, że dowód da się przejrzeć i sprawdzić, należy odróżnić lokalną i globalną możność przejrzenia. Bassler w (2006) charakteryzuje je następująco:

> lokalna możność przejrzenia i sprawdzenia wymaga podania każdego pojedynczego kroku w dowodzie w pewnym porządku, podczas gdy globalna przeglądalność i sprawdzalność wymaga podania całego dowodu jako pewnej dającej się ogarnąć i pojąć całości. (s. 100).

Zatem lokalna przeglądalność i sprawdzalność nie oznacza, że dowód może być praktycznie przejrzany i sprawdzony. Można powiedzieć, że dowód twierdzenia o czterech barwach daje się globalnie przejrzeć i sprawdzić, ale nie lokalnie (przy założeniu, że jest się skłonnym zaakceptować rozróżnienie dowodu i obliczenia). Z drugiej strony, jeśli przyjąć, że globalna przeglądalność i sprawdzalność jest ugruntowana na lokalnej przeglądalności i sprawdzalności, to stwierdzenie to staje się fałszywe. Dodajmy, że należy także rozróżnić z jednej strony to, że dowód może być przejrzany i formalne sprawdzony, a z drugiej strony fakt, że dowód daje zrozumienie, dlaczego rozważane stwierdzenie zachodzi, i że ujawnia głębokie racje jego prawdziwości.

Warunek, zgodnie z którym dowód daje się przejrzeć i sprawdzić, nie jest właściwie wystarczająco precyzyjnie określony. W wieku XX panowała tendencja, by łączyć go z rozwojem metod formalnych i szukaniem zupełnych podstaw matematyki. Formalizacja traktowana była jako metoda zapewniająca lokalną przeglądalność i sprawdzalność. Prace Fregego, Russella i innych, zwłaszcza Hilberta, miały na celu znalezienie jasnej i wyraźnej reprezentacji syntaktycznej relacji semantycznych zachodzących w obrębie zdania.

Komputery i związane z nimi metody znalazły zastosowanie w matematyce nie tylko w dowodzie twierdzenia o czterech barwach. Stosuje się je w rozmaitych kontekstach, w szczególności: (1) do przeprowadzania obliczeń numerycznych, (2) do znajdowania (na ogół przybliżonych) rozwiązań równań i układów równań algebraicznych i różniczkowych, (3) w automatycznym dowodzeniu twierdzeń, (4) w sprawdzaniu poprawności dowodów matematycznych, (5) w dowodzeniu twierdzeń (mówi się tu o dowodach wspomaganych komputerowo), (6) w rozmaitych eksperymentach z obiektami matematycznymi (na przykład w teorii fraktali). Z naszego punktu widzenia najważniejsze są zastosowania typu (3) oraz (4) — zastosowania typu (5) rozważaliśmy wyżej w związku z twierdzeniem o czterech barwach.

Automatyczne dowodzenie twierdzeń związane jest z pomysłem Leibniza mechanizacji i automatyzacji rozumowań (por. Marciszewski i Murawski 1995). Idea ta była jednym z czynników, które przyczyniły się do rozwoju logiki formalnej i w konsekwencji wprowadzenia pojęcia dowodu formalnego.

Pojęcie dowodu formalnego zostało wprowadzone m.in. po to, by objaśnić nieformalne, potoczne pojęcie dowodu funkcjonujące w praktyce badawczej. Miało ono wyjaśnić te własności zwykłych dowodów, dzięki którym dowody stosowane przez matematyków uważane są za poprawne. Miały też pomóc zrozumieć, co to znaczy, że dane zdanie jest konsekwencją logiczną i daje się wydedukować z przyjętych założeń. Zauważmy, że pojęcie dowodu formalnego zostało wprowadzone w atmosferze kryzysu w podstawach matematyki i było rezultatem prób znalezienia rozwiązania tej sytuacji. Dla Fregego i Russella, twórców logicyzmu redukującego całą matematykę do logiki, był to cel sam w sobie — chodziło o wyodrębnienie dopuszczalnych metod dowodowych i zapewnienie w ten sposób, że każde użycie aksjomatu stanie się jawne i wyraźne. Z drugiej strony zauważmy, że Hilbert, twórca formalizmu, nie był zainteresowany formalizacją całej matematyki i faktycznym zastąpieniem zwykłych dowodów matematycznych dowodami formalnymi — był to dla niego tylko środek i narzędzie mające pomóc w wykazaniu, że rzeczywiście uprawiana matematyka jest niesprzeczna i bezpieczna. Dowody sformalizowane miały w jego ujęciu służyć celom teoretycznym — w szczególności dowodzeniu pewnych rezultatów o samej matematyce, a zatem rezultatów metamatematycznych.

Istotnie, rozwój logiki i pojęcia dowodu formalnego opartego całkowicie i wyłącznie na własnościach syntaktycznych umożliwił powstanie i rozwój metamatematyki. Otrzymano tu wiele interesujących wyników. Przede wszystkim sprecyzowano stary, funkcjonujący od czasów Euklidesa paradygmat matematyki — zastąpiony on został nowym paradygmatem, który nazwać można logiczno-teoriomnogościowym (por. Batóg 1996). Jego główne cechy można scharakteryzować następująco: (1) teoria mnogości stała się podstawową dyscypliną matematyczną — oznacza to w szczególności, że pewne pojęcia i metody teorii mnogości są obecne w każdej teorii matematycznej oraz że teoria mnogości wraz z logiką stanowią bazę i fundament całej matematyki, tzn. wszystkie pojęcia matematyczne można zdefiniować w terminach pojęć teorii mnogości, a wszystkie twierdzenia matematyki mogą być wydedukowane z aksjomatów teorii mnogości i praw logiki, (2) języki teorii matematycznych zostały ściśle oddzielone od języka naturalnego — teorie matematyczne są formułowane w językach sztucznych (na ogół symbolicznych), a znaczenie występujących w nich pojęć jest opisane wyłącznie przez aksjomaty; w każdej teorii wyodrębnia się pewne pojęcia pierwotne i wszystkie inne pojęcia są definiowane w terminach pojęć pierwotnych zgodnie z przyjętymi, precyzyjnie określonymi regułami, (3) teorie matematyczne zostały w większości zaksjomatyzowane, (4) teoria matematyczna i jej język są ściśle odróżniane od metateorii i jej języka (rozróżnienie to wprowadził Tarski). Zauważmy też, że dwa pojęcia istotne dla matematyki, a mianowicie pojęcie konsekwencji syntaktycznej (bycie dowodliwym) oraz pojęcie konsekwencji semantycznej zostały ściśle zdefiniowane i rozróżnione. Odróżniono też dokładnie dowodliwość od bycia prawdziwym. Jak pisaliśmy wyżej, w zwykłej praktyce badawczej w matematyce pojęć tych zwykle nie odróżnia się w zadowalający sposób, co więcej, często są one utożsamiane — mówi się, że twierdzenie zachodzi, tzn. zostało udowodnione lub że jest prawdziwe i traktuje się obie te wypowiedzi jako równoważne czy synonimiczne. Sam proces prowadzący do rozróżnienia dowodliwości i prawdziwości był długi i skomplikowany — por. Murawski (2002a) i (2002b). Kluczową rolę w tym procesie odegrały twierdzenia Gödla o niezupełności.

Wspomniane twierdzenia Gödla o niezupełności pokazały, że istnieją zdania, które są prawdziwe (w modelu zamierzonym teorii), ale ani ich, ani ich negacji nie można udowodnić, tzn. że są one nierozstrzygalne w danej teorii. Przed Gödlem wierzono, że dowodliwość formalna jest analizą pojęcia prawdziwości matematycznej. W liście do Hao Wanga z 7 marca 1968 roku Gödel pisał (por. Wang 1974, s. 10):

> […] formaliści uważali, że formalna dowodliwość jest *analizą* pojęcia prawdy matematycznej i dlatego nie byli oczywiście w stanie *odróżnić* obu tych pojęć.

Istotnie, w tym okresie nieformalne i intuicyjne pojęcie prawdy nie było powszechnie akceptowane jako pojęcie matematyczne.[5] W wykreślonym fragmencie brudnopisu odpowiedzi na list studenta Yossefa Balasa Gödel pisał:

> […] pojęcie obiektywnej prawdy matematycznej przeciwstawionej dowodliwości było traktowane z największą podejrzliwością i szeroko odrzucane jako bezsensowne (por. Wang 1987, s. 84-85).

Warto to porównać ze słowami Carnapa. Pisał on w swym dzienniku, że gdy zapraszał Tarskiego do wygłoszenia wykładu o pojęciu prawdy na Międzynarodowym Kongresie Filozofii Naukowej we wrześniu 1935 roku,

> Tarski był bardzo sceptyczny. Uważał, że większość filozofów, nawet tych pracujących w logice współczesnej, będzie nie tylko obojętnie, ale nawet wrogo nastawiona do wyjaśniania pojęcia prawdy.

I rzeczywiście, na kongresie „[…] był silny opór nawet ze strony naszych filozoficznych przyjaciół” (por. Carnap 1963, s. 61-62).

Wszystko to wyjaśnia w pewnym sensie, dlaczego Hilbert wolał w swojej metamatematyce odwoływać się wyłącznie do kształtu i formy wyrażeń oraz stosować tylko rozumowania finitystyczne uważane za bezpieczne, w przeciwieństwie do rozumowań semantycznych, które nie są na ogół finitystyczne i w konsekwencji całkowicie bezpieczne. Rozumowania infinitystyczne były uważane za sensowne tylko o tyle, o ile mogły być zinterpretowane czy ugruntowane w terminach metamatematyki finitystycznej.[6]

Zauważyć jednak trzeba, że w rozważanym okresie nie było jasnego i precyzyjnego odróżnienia syntaksy i semantyki. Systemy aksjomatyczne, które rozważał Hilbert, miały często wbudowaną od początku interpretację. Hilbert nie dysponował jeszcze pojęciami niezbędnymi do właściwego wyrażenia różnic między syntaksą i semantyką.

Twierdzenia Gödla o niezupełności pokazały, że prawdy nie można w sposób adekwatny osiągnąć i wyrazić za pomocą pojęcia dowodliwości, że nie można całej matematyki (ani nawet jej części) zawrzeć w żadnym sformalizowanym systemie aksjomatycznym. To wskazywało na pewną ograniczoność pojęcia dowodu formalnego. Twierdzenia Gödla pokazały też, że nie można ograniczać twórczej inwencji matematyków. W ramach wyznaczonych przez sformalizowane systemy aksjomatyczne można rozszerzać „inwencję twórczą” przez dołączanie nowych aksjomatów

---

[5] Zauważmy, że nie było wtedy jeszcze ścisłej definicji prawdy, która podana została dopiero przez Tarskiego w roku 1933 — por. Tarski (1933).

[6] Por. list Gödla do Hao Wanga z 7 grudnia 1967 roku — zob. Wang (1974), s. 8.

albo przez dopuszczanie nowych reguł wnioskowania. Ta druga możliwość oznacza akceptację reguł infinitystycznych — to jednak zmienia cały obraz matematyki i jest niezgodne z funkcjonującym paradygmatem. Z drugiej strony można zapytać, czy dołączanie nowych aksjomatów, niezbędne, by rozwiązać problemy dotąd nierozstrzygalne, wystarczy. Czy to wystarczy, by w sposób pełny i adekwatny wyrazić kreatywność umysłu matematycznego, kreatywność matematyka?

Wyniki Gödla dotyczące niezupełności zalicza się do tzw. twierdzeń limitacyjnych. Są to wyniki głoszące, że pewne własności istotne i pożądane z punktu widzenia metamatematyki (ale także z punktu widzenia „normalnego" matematyka prowadzącego badania) są nieosiągalne. Należy do nich twierdzenie Tarskiego o niedefiniowalności pojęcia prawdy głoszące, że pojęcia prawdy dla danego języka *L* nie można zdefiniować w tym języku, można to zrobić jedynie w języku szerszym i bogatszym. Należy do nich także twierdzenie Skolema–Löwenheima, zgodnie z którym żadna struktura matematyczna nie może być adekwatnie i jednoznacznie opisana przez system sformalizowany — istotnie, każda teoria mająca choć jeden model, ma wiele różnych modeli. Tarski pisał w (1969, s. 74):

> Zastąpienie dawnego, psychologicznego pojęcia dowodu, które nigdy chyba nie dałoby się całkowicie wyjaśnić i uściślić, przez nowe, proste pojęcie o charakterze czysto formalnym, było niewątpliwie jednym z wielkich osiągnięć współczesnej logiki. Ten tryumf metody formalnej niósł jednak w sobie zalążek przyszłej klęski.

Badania dotyczące dowodów formalnych ukazały także rolę, jaką nieskończoność pełni w matematyce, w szczególności w procesie dowodzenia. Wyniki Gödla pokazały, że finitystyczne metody syntaktycznej dowodliwości formalnej nie wyczerpują całej rozmaitości kryjącej się w pojęciu prawdy matematycznej. Istotnie, gdy chce się otrzymać teorię zupełną, to konieczne są pewne reguły infinitystyczne, takie na przykład jak ω-reguła. Przypomnijmy, że ω-reguła to reguła wnioskowania o nieskończenie wielu przesłankach, dokładniej jest to reguła następująca:

$$\frac{\varphi(0),\ \varphi(1),\ \varphi(2),\ \ldots,\ \varphi(n),\ \ldots\ (\mathrm{n} \in \mathbf{N})}{\forall\, x\ \varphi(x).}$$

W praktyce badawczej żaden matematyk nie ogranicza się do metod skończonych, przeciwnie, stosuje się dowolne poprawne metody, wśród nich zaś metody nieskończone (w szczególności teoriomnogościowe czy semantyczne).

Choć okazało się, że dowody formalne nie są takim idealnym narzędziem, jak oczekiwano, odgrywają one jednak bardzo istotną i ważną rolę w metamatematyce, tzn. w badaniu teorii matematycznych czy kolekcji takich teorii, chociaż nie tylko tam. Umożliwiają one bowiem także automatyzację i mechanizację dowodów w matematyce — pozwalają w szczególności na budowanie dowodów automatycznych i na komputerową weryfikację dowodów. Automatyczna i komputerowa weryfikacja dowodów formalnych jest możliwa, ponieważ relacja „*x* jest dowodem *y*" jest — jak pokazano w logice matematycznej — rekurencyjna, a więc efektywnie obliczalna. Z drugiej strony samo konstruowanie czy znajdowanie dowodów nie jest procedurą efektywną (nie jest rekurencyjne) — jest jedynie rekurencyjnie przeliczalne. Można więc powiedzieć, że „formalizacja dotyczy sprawdzania, a nie odkrywania" (por. Wiedijk 2008, s. 1414). Wyniki Turinga, Churcha i Gödla pokazały, że nie istnieje żadna uniwersalna metoda znajdowania czy budowania dowodów (formalnych). Każdy zatem dowód formalny (i nie tylko formalny!) jest rezultatem twórczej inwencji umysłu ludzkiego.

Zauważmy, że pojęcie dowodu formalnego jest ogólne i takie samo dla wszystkich teorii (modulo przyjmowany zbiór aksjomatów). Jest ono niezależne od czynników i elementów subiektywnych, kulturowych czy socjologicznych. Co więcej, twierdzenie Gödla o pełności stwierdza, że logika pierwszego rzędu (rachunek predykatów pierwszego rzędu) jest wystarczającym narzędziem (w wypadku logiki drugiego rzędu sytuacja jest inna — nie zachodzi tu bowiem fenomen pełności). Pojęcie dowodu formalnego pozwala więc uczynić pojęcie dowodu bardziej obiektywnym. Umożliwia także precyzyjne i ścisłe badanie własności dowodliwości w matematyce.[7] Możemy więc dowodzić ściśle wyników mówiących, że dane stwierdzenie nie jest twierdzeniem danej teorii, tzn. że nie istnieje dowód tego stwierdzenia czy też że dane stwierdzenie jest nierozstrzygalne w rozważanej teorii. Pozwala to także na badanie ważnych własności teorii matematycznych takich jak niesprzeczność, zupełność, niezależność aksjomatów bądź aksjomatyzowalność teorii w określony sposób itd.

Pojęcie dowodu formalnego okazuje się użyteczne także w filozofii matematyki. Wykorzystywane jest w poszukiwaniu odpowiedzi na pytanie o istnienie i charakter przedmiotów matematyki, jak również w rozważaniach epistemologicznych nad matematyką. Z drugiej strony wszelkie koncepcje w filozofii matematyki sprowadzające matematykę do sformalizowanych teorii aksjomatycznych (wśród nich logicyzm i formalizm) mają charakter redukcjonistyczny i nie biorą pod uwagę rzeczywistej praktyki badawczej matematyków. Ich celem jest ugruntowanie i usprawiedliwienie matematyki jako takiej, a nie wyjaśnienie rzeczywistej praktyki badawczej. Zauważmy jednak, że w ostatnich latach pojawiły się w filozofii matematyki nowe prądy, które stawiają sobie za cel właśnie takie wyjaśnienie i koncentrują się na badaniu tego, co matematycy *rzeczywiście* robią w swoich badaniach. Uwzględnia się przy tym rozmaite czynniki socjologiczne, psychologiczne i kulturowe. Niestety są to na ogół tylko analizy poszczególnych odkryć czy dokonań, a więc tzw. *case studies*. Nie ma jak dotąd żadnych ogólnych koncepcji. Ale czy stworzenie takich ogólnych koncepcji jest w ogóle możliwe?

Dowody formalne są związane raczej z badaniami w zakresie logiki i podstaw matematyki, a nie bezpośrednio z praktyką badawczą matematyków. Zauważmy, że dowód formalny nie daje na ogół zrozumienia, nie wyjaśnia też głębokich racji za-

---

[7] Przy założeniu oczywiście, że logiczne pojęcie dowodu (czyli pojęcie dowodu formalnego) odzwierciedla wszystkie ważne i istotne cechy dowodów pojawiających się w praktyce badawczej matematyków (a to, czy tak istotnie jest, to problem, do którego wrócimy poniżej).

chodzenia danego twierdzenia. Dowody takie nie są też odpowiednie do praktyki badawczej — są po prostu za długie, zbyt nudne i uciążliwe. Często ginie leżąca u ich podstaw intuicja. Matematyka sformalizowana może być też bardziej niż zwykła narażona na błędy — manipulacje formalne mogą być bardzo skomplikowane. Jak pisał Bourbaki (por. Bourbaki 1968):

> Gdyby matematyka sformalizowana była tak prosta jak gra w szachy, to z chwilą opisania języka sformalizowanego pozostałoby tylko zadanie pisania dowodów w tym języku […]. Rzecz jest jednak nie tak prosta i nie potrzeba dużego doświadczenia by zauważyć, że projekt taki jest absolutnie nie do zrealizowania: najdrobniejszy dowód z początków teorii mnogości wymagałby już wielu setek znaków do pełnej formalizacji. […] matematyka sformalizowana nie da się praktycznie w sposób pełny zapisać, […]. Dlatego też szybko opuścimy teren matematyki sformalizowanej […].

CadwalladerOlsker pisze w (2011, s. 42):

> Dowód czysto formalny […] nie może być bardzo złożony, o ile nie ma się stać tak długi, że aż nie do pojęcia przez człowieka. Taki dowód rzadko może pełnić rolę wyjaśniającą i może być przekonujący tylko w takim stopniu, w jakim może zostać przeczytany i zrozumiany przez czytelnika albo sprawdzony przez komputer.

Dodajmy, że transkrypcja pojedynczego dowodu tradycyjnego (zatem niesformalizowanego) na dowód formalny bywa zadaniem niebanalnym.

* * *

Pokazaliśmy, że w matematyce mamy do czynienia z dwoma pojęciami dowodu: dowodem nieformalnym, stosowanym przez matematyków w ich praktyce badawczej i z dowodem formalnym (albo sformalizowanym), pojawiającym się przede wszystkim w logice i w podstawach matematyki. To pierwsze pojęcie nie jest zdefiniowane precyzyjnie, a wszelkie próby takiej definicji są daremne. Jest to pojęcie natury praktycznej określane za pomocą przykładów jego stosowania przez matematyków. Ma ono w istocie charakter psychologiczny, socjologiczny i kulturowy. To drugie pojęcie — pojęcie dowodu formalnego — ma charakter raczej teoretyczny niż praktyczny. Pierwsze ma — przynajmniej w części — charakter semantyczny, drugie zaś jest w pełni natury syntaktycznej.

Mamy więc tu do czynienia z sytuacją w pewnym sensie analogiczną do sytuacji związanej z tezą Turinga–Churcha. Głosi ona równoważność dwóch pojęć: pojęcia efektywnej obliczalności (w sensie intuicyjnym) i pojęcia rekurencyjności. Jak wiadomo, równoważności tej nie można dowieść z takim stopniem precyzji i ścisłości, jaki wiążemy i jakiego oczekujemy od dowodów w matematyce. Powodem tego jest fakt, iż jedna ze stron tej równoważności zawiera nieścisłe pojęcie intuicyjne wyrażone w nieprecyzyjnym języku potocznym, a druga ścisłe pojęcie zdefiniowane w języku matematyki (por. na ten temat Murawski 2004 oraz Murawski i Woleński 2006). Z sytuacjami tego typu spotykamy się często w matematyce. Wystarczy wymienić choćby pojęcie funkcji, pojęcie prawdy, prawdziwości logicznej czy pojęcie granicy (por. Mendelson 1990). Istotnie, aż do końca XIX wieku pojęcie funkcji było wiązane z jakąś regułą obliczania jej wartości wyrażoną na ogół przez formułę-wzór. W XIX i XX wieku, wykorzystując stworzoną właśnie teorię mnogości, zaczęto definiować funkcję jako zbiór par uporządkowanych spełniający odpowiednie warunki. Zdanie głoszące, że oba te podejścia są równoważne, nazywa się w literaturze tezą Peana. Podobnie tezą Tarskiego można nazwać zdanie głoszące identyczność intuicyjnego pojęcia prawdy i precyzyjnie zdefiniowanego pojęcia prawdziwości w sensie Tarskiego. Intuicyjne pojęcie granicy szeroko wykorzystywane w analizie matematycznej w XVIII wieku, a następnie w wieku XIX wykorzystane przez Cauchy'ego do zdefiniowania podstawowych pojęć rachunku różniczkowego i całkowego zostało precyzyjnie określone przez Weierstrassa w języku ε–δ. Można by przytoczyć wiele innych jeszcze takich przykładów, choćby pojęcie miary jako eksplikację pojęcia pola powierzchni i objętości, topologiczną definicję wymiaru czy definicję prędkości jako pochodnej itd.

Wzorując się na powyższych przykładach, można pokusić się o sformułowanie tezy głoszącej równoważność obu pojęć dowodu w matematyce — można by nazwać takie zdanie tezą teoriodowodową. Podobnie jak w wypadku tezy Turinga–Churcha nie można oczekiwać precyzyjnego i ścisłego jej dowodu. Można co najwyżej próbować formułować argumenty za jej słusznością (czy ewentualnie podważające jej słuszność). Podstawowym argumentem za taką tezą jest — popularne wśród matematyków i logików — przekonanie, że każdy „normalny" dowód matematyczny można sformalizować, tzn. że może on być przekształcony w dowód formalny na gruncie stosownej teorii aksjomatycznej. Nie istnieją oczywiście żadne ogólne reguły czy zasady, które mówiłyby, jak to zrobić. Formalizacja dowodu jest na ogół zadaniem niebanalnym i wymaga zwykle jakiegoś oryginalnego i nie zawsze oczywistego pomysłu.

Dochodzimy więc w ten sposób do następującej konkluzji końcowej: w matematyce funkcjonują dwa pojęcia dowodu. Pełnią one różne, ale komplementarne role: dowody formalne są stosowane głównie w metamatematyce i w rozważaniach logicznych, podczas gdy „normalne" dowody nieformalne używane są w praktyce badawczej matematyków.

LITERATURA CYTOWANA

Aigner, M. and Ziegler, G.M. (1998), *Proofs From The Book*, Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York (second edition 2001, third edition 2004).

Avigad, J. (2006), *Mathematical method and proof*, „Synthese" 153, s. 105-159.

Bassler, G.B. (2006), *The surveyability of mathematical proof: a historical perspective*, „Synthese" 148, s. 99-133.

Batóg, T. (1996), *Dwa paradygmaty matematyki. Studium z dziejów i filozofii matematyki*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, Poznań.

Bedürftig, Th. i Murawski, R. (2012), *Philosophie der Mathematik*, wydanie II, Walter de Gruyter, Berlin–New York.

Bondecka-Krzykowska, I. (1999), *Dowody komputerowe a status epistemologiczny twierdzeń matematyki*, „Filozofia Nauki" 3-4 (27-28), s. 103-116.

Bourbaki, N. (1968), *Theory of Sets*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass.

CadwalladerOlsker, T. (2011), *What do we mean by mathematical proof?*, „Journal of Humanistic Mathematics" 1, s. 33-60.

Carnap, R. (1963), *Intellectual Autobiography*, [w:] Paul A. Schilpp (ed.), *The Philosophy of Rudolf Carnap*, Open Court Publishing Co., La Salle, Ill., s. 3-84.

De Villiers, M.D. (1999), *Rethinking Proof with the Geometer's Sketchpad*, Key Curriculum Press, Emeryville, CA.

Hersh, R. (1997), *What Is Mathematics, Really?*, Oxford University Press, New York.

Kordos M. (1994), *Wykłady z historii matematyki*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.

Mancosu, P. (2000), *On mathematical explanation*, [w:] E. Grosholz i H. Breger (ed.), *The Growth of Mathematical Knowledge*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, s. 103-119.

Mancosu, P. (2001), *Mathematical explanation: problems and prospects*, „Topoi" 20, s. 97-117.

Marciszewski, W. i Murawski, R. (1995), *Mechanization of Reasoning in a Historical Perspective*, Editions Rodopi, Amsterdam–Atlanta, GA.

Mendelson, E. (1990), *Second thoughts about Church's Thesis and mathematical proofs*, „The Journal of Philosophy" 87, s. 225-233.

Murawski, R. (2002a), *Truth vs. provability — philosophical and historical remarks*, „Logic and Logical Philosophy" 10 (2002), s. 93-117. Przedruk [w:] R. Murawski, *Essays in the Philosophy and History of Logic and Mathematics*, Editions Rodopi, Amsterdam–New York, s. 41-57.

Murawski, R. (2002b), *On the distinction proof-truth in mathematics*, [w:] P. Gärdenfors *et al*. (ed.) *In the Scope of Logic, Methodology and Philosophy of Science*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London, s. 287-303.

Murawski, R. (2004), *Church's thesis and its epistemological status*, „Annale Universitatis Mariae Curie-Skłodowska, Sectio AI, Informatica" 2 (2004), s. 57-70. Przedruk [w:] R. Murawski, *Essays in the Philosophy and History of Logic and Mathematics,* Editions Rodopi, Amsterdam/New York, NY, s. 123-134.

Murawski, R. i Woleński, J. (2006), *The status of Church's Thesis*, [w:] *Church's Thesis After 70 Years*, A. Olszewski, J. Woleński, R. Janusz (ed.), Ontos Verlag, Frankfurt 2006, s. 310-330.

Rota, G.-C. (1997), *The phenomenology of mathematical proof,* „Synthese" 111, s. 183-196.

Rowe, D.E. (1989), *Klein, Hilbert, and the Göttingen mathematical tradition*, „Osiris" (2) 5, s. 186-213.

Steiner, M. (1978), *Mathematical explanation*, „Philosophical Studies" 34, s. 133-151.

Tarski, A. (1933), *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych*, Nakładem Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Warszawa.

Tarski, A. (1969), *Truth and proof*, „Scientific American" 220, no. 6, s. 63-77. Przekład polski: *Prawda i dowód*, [w:] *Pisma logiczno-filozoficzne*. Tom I: *Prawda*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1995, s. 292-332.

Tymoczko, T. (1979), *The Four-Color Problem and its philosophical significance*, „The Journal of Philosophy" 76, s. 57-83. Przekład polski: *Problem czterech barw i jego znaczenie filozoficzne*, [w:] R. Murawski, *Współczesna filozofia matematyki. Wybór tekstów*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002, 310-340.

Wang, Hao (1974), *From Mathematics to Philosophy*, Routledge and Kegan Paul, London.
Wang, Hao (1987), *Reflections on Kurt Gödel*, M.I.T. Press, Cambridge, Mass.
Wiedijk, F. (2008), *Formal proof — getting started*, „Notices of the American Mathematical Society" 55, s. 1408-1414.