*Filozofia Nauki*
*Rok XVI, 2008, Nr 3-4(63-64)*

Krzysztof Wójtowicz

# Redukcje ontologiczne w matematyce
## Część I

Ten artykuł stanowi pierwszą część cyklu prac poświęconych problemowi redukcji ontologicznych w matematyce i wskazania podstawowej ontycznie kategorii przedmiotów matematycznych. Jeśli za punkt wyjścia weźmiemy praktykę matematyczną i stanowisko „naiwnego realizmu matematycznego”, to powinniśmy uznać, że świat matematyczny jest zaludniony przez całe bogactwo obiektów, będących ontycznymi korelatami różnych teorii matematycznych (takich jak liczby, figury geometryczne, przestrzenie Hilberta, rozmaitości różniczkowe, grupy, pierścienie, moduły *etc.*). Pojawia się naturalne pytanie, czy można wskazać bazową kategorię obiektów matematycznych, do której redukowalne byłyby pozostałe kategorie. Standardowa odpowiedź jest pozytywna: taką kategorią są zbiory, to one stanowią bazę ontologiczną dla całej matematyki. Z przyjęciem teoriomnogościowej ontologii dla matematyki wiążą się jednak pewne trudności. W niniejszej, wprowadzającej części wskażę niektóre z nich.

Problem redukcji ontologicznej ma sens (przynajmniej w ujęciu tu prezentowanym) tylko przy założeniu stanowiska realistycznego. To, jaki wariant tego stanowiska przyjmiemy, i na podstawie jakich argumentów, ma oczywiście znaczenie.[1]

[1] Problem redukcji ontologicznych w matematyce analizuję tutaj przy (roboczym) założeniu stanowiska realistycznego. Można wprawdzie rozważać ów problem w szerszym kontekście, traktując koncepcje antyrealistyczne jako próbę realizacji redukcji ontologicznej w najbardziej radykalnym sensie — jako redukcji eliminacyjnej. W takim duchu można interpretować np. propozycję Fielda (redukcji obiektów matematycznych do czasoprzestrzennych, por. [Field 1980]), Chihary (redukcja obiektów matematycznych do lingwistycznych, por. [Chihara 1990]) czy Hellmana (redukcja o charakterze modalnym, por. [Hellman 1989]). W oderwaniu od tezy matematycznego realizmu można również rozważać problem zależności (redukcji) pojęciowych w matematyce.

W kolejnych częściach pracy przedstawione są więc szkicowo najważniejsze we współczesnej literaturze strategie argumentacyjne na rzecz realizmu, a następnie podjęta dyskusja szczegółowych problemów.[2]

## 1. PROBLEM POSZUKIWANIA PODSTAW — UWAGI WSTĘPNE

Problem redukcji ontologicznych ma ścisły związek z problemem poszukiwania podstaw (pojęciowych, epistemologicznych *etc.*) dla matematyki — czyli poszukiwań fundamentalnego systemu pojęć, dostatecznie silnego i ogólnego, aby móc w nim wyrazić w pojęciowo uporządkowany sposób podstawowe dla matematyki prawdy (i odtworzyć ciągi rozumowań matematycznych).

Aby lepiej zrozumieć zagadnienie, warto poczynić kilka uwag o charakterze historycznym. W swoim naturalnym rozwoju teorie matematyczne powstawały jako teorie niesformalizowane i niezaksjomatyzowane, w sposób spontaniczny. Klasyczne wyniki (np. teorii liczb, rachunku różniczkowego i całkowego, geometrii różniczkowej, algebry *etc.*) zostały uzyskane niezależnie od formalizacji matematyki w czasach, kiedy matematyka była uprawiana w sposób — z punktu widzenia dzisiejszych standardów — nie w pełni ścisły. Refleksja metodologiczna była wówczas podejmowana co najwyżej na bardzo elementarnym poziomie. Potrzeba refleksji metateoretycznej, wykraczającej poza doraźne potrzeby praktyczne pojawia się zazwyczaj dopiero na dostatecznie dojrzałym etapie rozwoju danej dyscypliny, i podobnie było w przypadku teorii matematycznych. Problem identyfikacji pojęć pierwotnych i ewentualnego poszukiwania aksjomatyki pojawia się dopiero wtedy, gdy rozpoznane są podstawowe zależności pojęciowe, gdy wiadomo już, jakie są problemy danej dyscypliny, jaki jest jej obszar zainteresowań, jakie są standardy uzasadniania tez *etc.*[3]

Z problemem poszukiwania wspólnych dla całej matematyki ram pojęciowych związany jest bezpośrednio problem określenia standardów argumentacji matematycznej. Ustalenie owych standardów jest szczególnie ważne, jeśli przyjmujemy realistyczną interpretację matematyki. Mówiąc swobodnie, chcielibyśmy wiedzieć, jakie są narzędzia „transmisji prawdy” od podstawowych, intuicyjnie uznawanych za prawdziwe zasad, do bardziej zaawansowanych teoretycznie wniosków.

Za naturalny pogląd dotyczący natury dowodu matematycznego można — jak sądzę — uznać pogląd „treściowy”. Tak hasłowo określam pogląd, w myśl którego proces dowodzenia w matematyce znajduje swoje uzasadnienie w intuicyjnym ujęciu prawd matematycznych i prawomocności kroków dowodowych. Taki był np. pogląd Kartezjusza, jego zaś kryterium prawdziwości (jasne i wyraźne widzenie) miało za-

---

[2] Chodzi m.in. o problem rekonstrukcji (fragmentów) matematyki w innym niż teoria mnogości systemie pojęć; problemu stosowania teorii mnogości jako metateorii; a także problem siły założeń ontologicznych oraz relatywności ontologicznej.

[3] Np. aksjomatyzacja teorii liczb czy teorii prawdopodobieństwa pojawiła się dopiero wówczas, gdy były to już stosunkowo dojrzałe teorie.

stosowanie zarówno do uzasadniania podstawowych prawd matematycznych, jak i do uzasadniania prawomocności poszczególnych kroków rozumowań matematycznych. Intuicję Kartezjusz określa jako

> nie zmienne świadectwo zmysłów, lub zwodniczy sąd źle tworzącej wyobraźni, lecz tak łatwe i wyraźne pojęcie umysłu czystego i uważnego, że o tym, co poznajemy, zgoła już wątpić nie możemy, lub, co na jedno wychodzi, pojęcie niewątpliwe umysłu czystego i uważnego, że o tym, co poznajemy, zgoła już wątpić nie możemy [Descartes 1958, s. 12].

Intuicyjne poznawanie (w szczególności poznanie matematyczne) stanowi więc pewien czysto intelektualny akt. Można powiedzieć, że jeśli przyjmiemy taki punkt widzenia, to nie jest konieczne dokonywanie formalnych rekonstrukcji pojęć i rozumowań matematycznych, skoro rozstrzygającą instancją jest nasza intuicja.[4]

Z biegiem czasu zaczęły pojawiać się różnice zdań w kwestiach dotyczących standardów dowodowych w matematyce i zaczęło stawać się jasne, że odwołanie do intuicyjnej zgody nie wystarczy. To, co dla jednych było w oczywisty sposób poprawne, dla innych było „nielegalne". Często przytacza się w tym kontekście przykład podanego przez Hilberta dowodu istnienia bazy dla systemów form algebraicznych. Ze względu na swą niekonstruktywność, dowód Hilberta nie został od razu powszechnie zaakceptowany.[5] Inny standardowy przykład dotyczy statusu praw logiki klasycznej, kwestionowanych przez intuicjonistów (co prowadziło ich do rewizji pojęcia dowodu matematycznego). Pamiętajmy także o sporach dotyczących pewnika wyboru jako dopuszczalnego założenia (na swoistą ironię zakrawa tu fakt, że gorącymi przeciwnikami tego aksjomatu byli np. Borel czy Lebesgue, którzy posługiwali się nim nieświadomie). Pojawiła się więc potrzeba podjęcia refleksji na tematy podstawowe — w szczególności standardów matematycznej argumentacji oraz podstawowych pojęć i prawd matematycznych. Intuicyjny sposób rozumienia procesu dowodzenia w matematyce (w duchu Kartezjusza) stopniowo ustępował poglądowi, w myśl którego standardy argumentacyjne w matematyce winny być ustalane w po-

---

[4] Samo pojęcie intuicji jest pojęciem bardzo wieloznacznym; tu ograniczę się do uwagi, że nie chodzi oczywiście o intuicję w sensie jakiejś „pozapojęciowej kontemplacji". Chodzi o fakt znany wszystkim matematykom, którzy widząc pewien niesformalizowany dowód są w stanie zaakceptować kolejne kroki dowodowe, choć — z czysto formalnego punktu widzenia — są w nim oczywiście duże luki. Matematyk dowodząc twierdzenia np. w trakcie referatu czy wykładu nie podaje jego formalnej wersji, podaje natomiast przekonujące dla słuchaczy argumenty, odwołując się do intuicyjnego — w tym sensie — rozumienia i akceptacji formułowanych przez niego kroków dowodowych.

[5] Nad problemem pracował Gordan i podał konstruktywny (można powiedzieć: obliczeniowy) dowód w pewnym szczególnym przypadku (w roku 1868 udowodnił istnienie takiej skończonej bazy dla każdego systemu algebraicznych form binarnych). Hilbert udowodnił w roku 1890 twierdzenie ogólniejsze, głoszące, że każdy system form algebraicznych w skończonej liczbie zmiennych ma bazę skończoną. Jednak dowód ten miał charakter niekonstruktywny: dowodził istnienia takiej bazy, ale nie podawał sposobu konstrukcji. Gordan — który jako ekspert w tej dziedzinie oceniał dowód Hilberta — miał podobno powiedzieć, że dowód Hilberta to teologia, a nie matematyka.

staci reguł, mających charakter (po części) czysto formalny. Taka kodyfikacja wymagała ujednolicenia systemów pojęć, a ten fakt ma niewątpliwie istotne znaczenie z punktu widzenia dyskusji problemu redukcji ontologicznej.

Wyraźnie było to widoczne w przypadku geometrii — „styl wyobrażeniowy" ustąpić musiał rygorystycznym analizom Pascha czy Hilberta. Historia geometrii stanowi klarowną ilustrację procesu, którego skutkiem była zmiana rozumienia natury dowodu matematycznego. Stanowi przy tym swoisty *toy example* dla problemu redukcji ontologicznych, dlatego warto poświęcić jej nieco uwagi. Tradycyjnie (mówiąc bardzo swobodnie — w czasach przedhilbertowskich), geometria była uważana za naukę posiadającą pewien zamierzony przedmiot badań. Niektórzy sądzili, że przedmiotem tym są po prostu własności przestrzeni fizycznej. Przecież Kant, badając problem zdań syntetycznych *a priori*, jako przykłady takich zdań podawał właśnie zdania dotyczące geometrii.[6] Wraz z rozwojem matematyki (w szczególności w związku z pojawieniem się geometrii nieeuklidesowych oraz ogólnego ujęcia geometrii przez Riemanna) odchodzono od idei, iż geometria dotyczyć ma przestrzeni fizycznej czy nawet jakiegoś ustalonego przedmiotu badań.[7] Istotne znaczenie dla kształtowania się nowego ujęcia geometrii miały niewątpliwie prace Pascha i Hilberta. Zdaniem Pascha, intuicyjne rozumienie pojęć (w szczególności odwoływanie się do elementów o charakterze poglądowym) nie jest bynajmniej konieczne w geometrii; co więcej, warunkiem pełnej ścisłości dowodu jest właśnie abstrahowanie od intuicyjnego rozumienia pojęć. Dowodom powinniśmy umieć nadać czysto formalną postać; odwołania do intuicji w dowodzie geometrycznym świadczą o tym, że dowód ten zawiera luki.[8] Również Hilbert uprawiał geometrię w duchu realizacji postulatu

---

[6] Mill zaś — jeszcze w drugiej połowie XIX w. — uważał geometrię za rodzaj wyrafinowanej sztuki geodezyjno-kartograficznej, której twierdzenia ustalamy na podstawie indukcyjnych uogólnień obserwacji:

> [C]o jest podstawą naszego przeświadczenia o prawdziwości aksjomatów, co jest tą oczywistą podstawą, na której one się opierają? Odpowiadam, że są one prawdami eksperymentalnymi, że są to uogólnienia na podstawie obserwacji. Twierdzenie „Dwie proste nie mogą zamykać przestrzeni" alby innymi słowy: „Dwie proste, które raz się spotkały, nie spotykają się znowu, lecz stale oddalają się coraz więcej od siebie" — to zdanie jest wnioskiem indukcyjnym na podstawie danych, jakich nam dostarczają nasze zmysły [Mill 1962, s. 358].

[7] W pracy [Gray 1989, s. 171] znajdziemy opinię, że nawet geometria sferyczna początkowo nie była postrzegana jako model dla **geometrii**. Wynikało to z faktu, że geometrię postrzegano jako naukę dotyczącą prostych na płaszczyźnie (lub w przestrzeni), a nie krzywych na kuli. A przecież nie ulega wątpliwości, że sfera jest obiektem geometrycznym. Był to więc wyraz bardzo wąskiego rozumienia tego, czym jest geometria.

> [8] Jeśli geometria ma naprawdę być nauką dedukcyjną, proces wnioskowania musi we wszystkich fragmentach być niezależny od znaczenia pojęć geometrycznych, podobnie jak musi być niezależny od diagramów; pod uwagę mogą być brane jedynie relacje wyrażane w twierdzeniach i definicjach. W czasie wnioskowania jest użyteczne i dopuszczalne, ale nie konieczne myślenie o znaczeniach terminów; faktycznie, jeśli jest to konieczne, to w ten sposób widoczna staje się niepoprawność dowodu [Pasch 1882, s. 98].

ścisłości dowodowej. Miał twierdzić, że przy prawidłowej aksjomatyzacji geometrii powinniśmy móc mówić o stołach, krzesłach i kuflach piwa, a nie o punktach, prostych i płaszczyznach (por. [Shapiro 1996, s. 156]). W takim ujęciu nie ma więc sensu zastanawianie się nad tym, jaka jest „istota" obiektów geometrycznych, ale jedynie nad tym, w jakich do siebie pozostają relacjach.

Jest to niewątpliwie istotny fakt z punktu widzenia dyskusji dotyczącej ontologicznej interpretacji teorii matematycznych. Hilbert konstruował modele dla teorii geometrycznych interpretując obiekty geometryczne jako zbiory liczb (par liczb, trójek liczb, $n$-tek liczb *etc*.). Tę procedurę znamy ze szkoły — na lekcjach geometrii utożsamialiśmy prostą ze zbiorem par liczb rzeczywistych $(x,y)$, spełniających równanie $y=ax+b$, okrąg z innym zbiorem punktów *etc.* Takie interpretacje są „legalne" dzięki temu, że zachowują one zależności o charakterze **strukturalnym**: relacjom między obiektami geometrycznymi (np. styczności dwóch okręgów) odpowiadają relacje między zbiorami par liczb (np. posiadanie dokładnie jednego wspólnego elementu) albo między wyrażeniami algebraicznymi (posiadanie dokładnie jednego wspólnego rozwiązania). W pewnym więc sensie pytanie o to, co jest przedmiotem badań geometrii — lub inaczej: czym są obiekty geometryczne — staje się pytaniem źle postawionym, mamy bowiem do czynienia z ontologiczną redukcją do klasy odpowiednich zbiorów par punktów albo do obiektów algebraicznych.[9]

Podobny proces formalizacji zachodził również w przypadku rachunku różniczkowego i całkowego: intuicyjnie rozumiane pojęcia ustąpiły ścisłej definicji epsilonowo-deltowej, podanej już w wieku XIX przez Cauchy'ego.[10] Natomiast na precyzyjne ujęcie intuicji nieskończenie małych wielkości (którymi przecież matematycy posługiwali się całkiem sprawnie) trzeba było czekać aż do XX wieku, kiedy to Robinson skonstruował model dla analizy niestandardowej, tj. takiej, w której pojawiają się wielkości nieskończenie małe.[11] Skonstruowane zostało w ten sposób pewne rozszerzenie dobrze nam znanego ciała liczb rzeczywistych. W naturalny sposób poja-

[9] W miejsce prostej pojawi się zbiór par $(x,y)$, takich że $y=ax+b$, w miejsce okręgu — zbiór par liczb rzeczywistych $(x,y)$, takich że $x^2+y^2=1$ *etc.* Figury geometryczne zostają więc zredukowane do zbiorów par liczb rzeczywistych. Zauważmy, że np. problemy wykonalności konstrukcji za pomocą cyrkla i linijki (np. trysekcji kąta) mają swoje odpowiedniki w postaci problemów algebraicznych. Choć więc problem trysekcji jest problemem *prima facie* geometrycznym, to można go interpretować jako problem algebraiczny, pytanie zaś, czego **tak naprawdę** dotyczy ów problem uznać za pytanie źle postawione.

[10] Należy oczywiście dodać, że matematycy posługiwali się rachunkiem różniczkowym, zanim został on ujęty w rygorystycznej formie. Przypomina to nieco sytuację z funkcją $\delta$ Diraca, którą fizycy posługiwali się z powodzeniem, zanim została „zalegalizowana" jako prawomocna konstrukcja matematyczna.

[11] Nie wnikając w szczegóły: są to takie elementy $c>0$, które można dodawać, i które mają taką własność, że $c+\ldots+c<1$, niezależnie od tego, ile razy zostaną do siebie dodane. Oczywiście, zwykłe liczby nie mają takiej własności. Pozostaje pytanie, czy taka konstrukcja precyzyjnie oddaje intuicje np. Leibniza, ale na to pytanie można poszukiwać co najwyżej pośrednich odpowiedzi, poprzez — można powiedzieć — hermeneutyczną analizę oryginalnych tekstów.

wiają się problemy o charakterze ontologicznym: czym są liczby rzeczywiste — czy są one jedynie podklasą w (szerszym) ciele niestandardowych (w szczególności nieskończenie małych) obiektów? Czy istnieją samoistnie? „Analiza epsilonowo-deltowa” i „analiza nieskończenie małych” to dwie różne teorie.[12] Możemy więc postawić problem: jaki jest status ontologicznych korelatów tych teorii?[13]

Nie będę podejmował problemu, kiedy zaczęto uświadamiać sobie potrzebę refleksji metodologicznej, nie ulega jednak wątpliwości, że była ona już wyraźna w drugiej połowie XIX wieku. Jest to okres, kiedy pojawiły się pionierskie prace dotyczące współczesnej logiki formalnej i podstaw matematyki (wystarczy wymienić np. nazwiska Fregego czy Peano). Dla omawianego tutaj problemu redukcji ontologicznej szczególnie ważne okazały się prace Cantora, w których wyłożył podstawy teorii mnogości. Jego ujęcie można uznać za przełomowe, ze względu na ogólność. Cantor, mówiąc o zbiorach, abstrahował bowiem od natury ich elementów — nie chodziło już więc o zbiory liczb, krzywych, figur, funkcji *etc.*, ale o zbiory utworzone z dowolnych elementów.[14] Wcześniej matematycy zajmowali się problemami zdecydowanie bardziej „konkretnymi”, ujęcie Cantora otworzyło przed matematyką nowe perspektywy i stanowiło inspirację do badania dowolnych abstrakcyjnych struktur.[15]

---

[12] Choć oczywiście zachodzą między nimi głębokie związki — twierdzenia dotyczące standardowych liczb obowiązują w obu tych teoriach.

[13] Oczywiście, odpowiedź **w ramach** teoriomnogościowej semantyki jest prosta: są to pewne zbiory, zdefiniowane z dokładnością do izomorfizmu (dla uproszczenia pomijam tu problem kategoryczności owych teorii). Jednak to stwierdzenie rozstrzyga dyskusję ontologiczną jedynie pod warunkiem przyjęcia silnych założeń, dotyczących adekwatności rekonstrukcji teoriomnogościowej.

[14] Pod pojęciem „zbioru” (*Menge*) rozumiem każde zebranie w jedną całość (*jede Zusammenfassung zu einem Ganzen*) *M* określonych, dobrze odróżnionych przedmiotów m naszego oglądu (*unserer Anschauung*) czy naszych myśli (za: [Murawski 1986, s. 157]).

[15] Ciekawą ilustracją procesu „odchodzenia od konkretu” jest ewolucja rozumienia pojęcia funkcji: od rozumienia funkcji jako „efektywnie danego” przyporządkowania (oczywiście nie w dzisiejszym sensie teorii obliczeń, chodzi o możliwość opisania tej funkcji za pomocą pewnego konkretnego wzoru) aż po rozumienie funkcji jako całkowicie dowolnego przyporządkowania. Analizę tego problemu można znaleźć np. w pracy [Maddy 1993], która podaje kilka ciekawych przykładów. Jednym z nich jest dyskusja między Eulerem a d’Alembertem dotycząca pojęcia funkcji, która toczyła się w kontekście analizy zagadnienia struny drgającej: d’Alembert zawęża pojęcie funkcji do funkcji zadanych wyrażeniami analitycznymi, Euler dopuszcza szerszą klasę funkcji. Riemann (przy okazji analizy problemu przedstawienia funkcji w postaci szeregu Fouriera) opowiada się za ogólnym pojęciem funkcji, za „legalne” uznając także takie, które nie mogą być przedstawione w postaci szeregu Fouriera. O tych dyskusjach i dylematach warto pamiętać, bo z dzisiejszego punktu widzenia wydaje się nam oczywiste, że funkcja to dowolny podzbiór iloczynu kartezjańskiego, taki że… *etc.* Można jednak się zastanawiać, czy faktycznie odpowiada to intuicjom związanym z pojęciem funkcji, czy też raczej wynika z odpowiedniego „teoriomnogościowego treningu” w czasie naszej edukacji. Nie można przecież zapominać o tym, że np. teoriokategoryjny system pojęć wychodzi od innego rozumienia pojęcia funkcji.

Teoria mnogości okazała się teorią na tyle silną i ogólną, że praktycznie wszystkie pojęcia matematyczne, używane wcześniej przez matematyków w sposób nieformalny (np. pojęcie liczby naturalnej, wymiernej, rzeczywistej, zespolonej, funkcji rzeczywistej, prawdopodobieństwa, różniczkowalności w sensie rzeczywistym i zespolonym, przestrzeni funkcyjnej, miary, szeregu funkcyjnego, bazy przestrzeni liniowej, rozmaitości różniczkowalnej *etc*.) mogły zostać zrekonstruowane formalnie w teorii mnogości. W tym sensie teoria mnogości zyskała miano najogólniejszej teorii matematycznej. Ten fakt może skłaniać do przyjęcia tezy, że to teoria mnogości opisuje bazę ontologiczną dla matematyki — czyli, że po prostu obiekty matematyczne są zbiorami.

## 2. TEORIA MNOGOŚCI JAKO PODSTAWA?

Teza głosząca, że droga do właściwej rekonstrukcji matematyki wiedzie właśnie przez teorię mnogości, jest przyjmowana dość powszechnie przez logików, specjalistów od podstaw matematyki czy filozofów matematyki. Przyjęcie tej tezy oferuje klarowne i eleganckie rozwiązanie problemu redukcji ontologicznej: po prostu wszystkie obiekty matematyczne są zbiorami, a ich „stałym miejscem pobytu" jest mnogościowe uniwersum. Z drugiej strony, wybranie teorii mnogości jako teorii podstawowej dla matematyki wiąże się z trudnościami, które skłaniają do przyjęcia alternatywnych punktów widzenia.

Zacznijmy od obserwacji, że teza o „teoriomnogościowości" wszystkich pojęć matematycznych wydaje się po prostu sprzeczna z naturalnym nastawieniem matematyka. Istnieje ogromna ilość dyscyplin matematycznych, a każda z nich ma swoje własne wewnętrzne problemy, techniki, otwarte pytania, kryteria ważności zagadnień, swoiste rozumienie specyfiki i „architektury" tej dyscypliny *etc*. Matematyk w swej pracy ma do czynienia z bogactwem obiektów matematycznych (strukturami algebraicznymi, geometrycznymi, topologicznymi, probabilistycznymi *etc.*). Nie ma on bynajmniej poczucia, że uprawia teorię mnogości, że obiekty, które bada (np. rozmaitości czterowymiarowe albo procesy stochastyczne), są po prostu pewnymi zbiorami, wytworzonymi ze zbioru pustego poprzez zastosowanie pewnych operacji teoriomnogościowych. Matematyk raczej postrzega obiekty jako takie, abstrahując całkowicie od problemu ich ewentualnej rekonstrukcji w ramach teorii mnogości (czy w innych systemach) i np. od problemu, jak wysoko w hierarchii iteracyjnej V znajdują się te obiekty. Z jego punktu widzenia, badane obiekty są dane bezpośrednio, natomiast rekonstrukcja w teorii mnogości jawi się jako zabieg sztuczny, a w każdym razie pozbawiony istotnego znaczenia z punktu widzenia jego dyscypliny.[16]

---

[16] Specjalista od teorii liczb bada liczby jako takie, a nie jako skończone liczby porządkowe. Specjalista od topologii bada — mówiąc oczywiście w uproszczeniu — własności przekształceń pewnego typu, niezmienniki homeomorfizmów, dyfeomorfizmów czy innego typu operacji dokonywanych na (mniej lub bardziej intuicyjnie postrzeganych) obiektach geometrycznych. Specjalista

Teoria mnogości jest więc przez matematyków postrzegana jako jedna z wielu dyscyplin, o bardzo dużym stopniu ogólności (ale zarazem o nikłym znaczeniu dla większości dyscyplin matematycznych). Mówiąc żartobliwie, gdyby nagle zniszczeniu uległy wszystkie książki z teorii mnogości, a specjaliści w tym zakresie zostaliby pozbawieni prawa wykonywania zawodu, to pozostali matematycy nie doznaliby większego uszczerbku ani utrudnień w swej codziennej pracy. Inaczej by jednak było, gdyby nagle unicestwieniu uległ dorobek ludzkości w zakresie np. analizy funkcjonalnej czy teorii prawdopodobieństwa.[17]

Zarazem jest jednak faktem, że wspomniana rekonstrukcja jest możliwa, i pojęcia matematyczne mogą być definiowane w ramach teorii mnogości (*eo ipso*: obiekty matematyczne mogą być traktowane po prostu jako pewnego rodzaju zbiory).[18] Prowadzi to do pewnego napięcia: logik i filozof jest skłonny postrzegać wszelkie obiekty matematyczne po prostu jako zbiory (a używając innego języka: będzie skłonny traktować hierarchię mnogościową V jako bazę ontologiczną dla całej matematyki). Natomiast matematyk nie ma poczucia, że zajmuje się teorią mnogości, redukcja teoriomnogościowa zaś jest przez niego postrzegana jako nieszkodliwy, lecz niemający wiele wspólnego z jego przedmiotem badań zabieg dokonywany przez kolegów z zakładów logiki i podstaw matematyki.

Powyższe argumenty dotyczące „obcości" teoriomnogościowych pojęć w matematyce można próbować uchylić, traktując je jako zapis pewnych przeżyć psychologicznych towarzyszących pracy matematyka — które nie mają znaczenia z punktu widzenia dyskusji ontologicznej. Nie rozwiązuje to jednak problemu, który uważam za doniosły: jakie są relacje pojęciowe między „zwykłą matematyką" a teorią mnogości? Czy to matematyk nie zdaje sobie sprawy z faktu, że tak naprawdę bada zbiory pewnego typu, czy też raczej filozof owładnięty ideą redukcjonizmu ontologicznego usiłuje wtłoczyć matematykę w system pojęć teorii mnogości? Sam fakt, że taka interpretacja jest standardowo dokonywana, nie rozstrzyga ontologicznego sporu o naturę obiektów matematycznych. Można przecież postawić pytanie, czy przy ta-

---

z zakresu równań różniczkowych interesuje się np. dynamiką pewnych przekształceń przestrzeni fazowej — i w ogóle nie patrzy na badane przez siebie obiekty jak na pewne zbiory „mieszkające" w uniwersum mnogościowym V.

[17] Oczywiście tu został użyty pewnego rodzaju skrót myślowy — trudno przecież wyraźnie ustalić granice między poszczególnymi działami matematyki; w szczególności trudno ustalić wyraźnie granice teorii mnogości. Trudno jednak się nie zgodzić, że tylko pewne fragmenty matematyki odwołują się do specyficznie teoriomnogościowych pojęć (np. pojęcia mocy, współkońcowości, dużych liczb kardynalnych, ultrafiltrów *etc.*).

[18] Na przykład liczby naturalne są definiowane jako $\varnothing$, $\{\varnothing\}$ *etc.,* liczby całkowite jako stosowne klasy abstrakcji relacji równoważności, określonej na parach liczb naturalnych, liczby wymierne jako klasy abstrakcji na parach liczb naturalnych i całkowitych, liczby rzeczywiste jako np. klasy abstrakcji ciągów Cauchy'ego czy przekroje Dedekinda *etc.* To wszystko odbywa się w ramach teorii mnogości.

kiej interpretacji nie mamy do czynienia ze zniekształceniem pierwotnego, intuicyjnego rozumienia pojęć matematycznych.[19]

Wybór teorii mnogości jako fundamentu dla matematyki wiąże się z pewnymi problemami filozoficznymi, niejako immanentnymi dla teorii mnogości (czy — mówiąc kolokwialnie — przez nią wygenerowanymi). Opiera się ona bowiem na bardzo silnych założeniach dotyczących istnienia i definiowania obiektów. Skorzystam z przejrzystej klasyfikacji Fefermana, który w [1987] wskazuje jako problematyczne filozoficznie następujące założenia: (a) Uznanie, iż zbiory istnieją niezależnie od działalności poznawczej matematyków. (b) Akceptacja nieskończoności aktualnej. (c) Uznanie istnienia zbiorów będących dowolnymi kombinacjami obiektów. (d) Uznanie dopuszczalności operacji tworzenia zbioru potęgowego. (e) Uznanie pewnika wyboru. (f) Traktowanie relacji i funkcji jako zbiorów. (g) Przyjęcie prawa wyłączonego środka. Nawet jeśli niektóre z nich (jak np. (g)) uznamy za problemy, które nie są specyficzne dla teorii mnogości, ale dotyczą w ogóle poszukiwania ram formalnych, problem (b) zaś za problem całej matematyki, a nie tylko teorii mnogości, to jednak z pewnością problemy (c), (d), (e) dotyczą właśnie założeń teoriomnogościowych dotyczących wykonywalności pewnych operacji definiowania nowych bytów.[20] Jeśli jednak poszukiwanie teorii podstawowej ma m.in. zagwarantować nam bezpieczeństwo badań, a teoria ta ma opierać się na możliwie niekontrowersyjnych założeniach, to z pewnością teoria mnogości tego postulatu nie spełnia — jej założenia trudno uznać za wzbudzające więcej zaufania niż założenia przyjmowane w codziennej pracy przez matematyków. Można więc powiedzieć, że za komfort rekonstrukcji płacimy cenę w postaci konieczności przyjęcia silnych i nieoczywistych założeń.[21]

---

[19] Zdaję sobie sprawę, że takie stwierdzenie nie jest w pełni jasne, jednak uważam, że problem zasługuje na dyskusję. To, jak rozumiemy pojęcia matematyczne i jaką rolę odgrywa tu teoriomnogościowa rekonstrukcja, ma bowiem istotne znaczenie dla dyskusji ontologicznej.

[20] Traktowanie operacji tworzenia zbioru potęgowego (tj. tworzenia wszystkich podzbiorów danego zbioru, niezależnie od możliwości ich zdefiniowania czy scharakteryzowania) jest założeniem bardzo silnym. Podobnie jest w przypadku pewnika wyboru, który ma charakter całkowicie niekonstruktywny.

[21] Program Hilberta stanowił próbę poszukiwania pewności w matematyce. W założeniu miał opierać się na założeniach możliwie mało kontrowersyjnych, które miały umożliwić uprawomocnienie silniejszych technik — w szczególności technik odwołujących się do pojęcia nieskończoności. Z punktu widzenia programu Hilberta, teoria mnogości musiała zatem zostać niejako „zalegalizowana", i sama w sobie nie mogła stanowić bezpiecznej podstawy. Nie ulega wątpliwości, że założenia dotyczące całej pozaskończonej hierarchii liczb porządkowych i kardynalnych, pozaskończonego iterowania pewnych operacji *etc.* są znacznie silniejsze (i przez to bardziej kontrowersyjne) niż założenia teorii liczb naturalnych czy rzeczywistych.

## 3. MATEMATYKA TEORIOMNOGOŚCIOWA I NIETEORIOMNOGOŚCIOWA

W teorii mnogości można zrekonstruować wszelkie zwykłe pojęcia matematyczne, jednak siła teorii mnogości wykracza poza te zwykłe, codzienne potrzeby.[22] W teorii mnogości dysponujemy na tyle silnymi metodami definiowania i dowodzenia istnienia obiektów, że uniwersum mnogościowe jest bardzo bogate — oprócz (odpowiedników) zwykłych obiektów matematycznych (jak liczby zespolone czy rozmaitości różniczkowe), pojawiają się w nim także obiekty, definiowane i opisywane środkami *stricte* teoriomnogościowymi. Założenie o istnieniu takich obiektów nie jest uzasadnione potrzebami zwykłej praktyki matematycznej (choć jest ciekawe samo w sobie i otwiera drogę do interesujących badań). Mamy więc do czynienia ze zjawiskiem swoistej nadwyżkowości teorii mnogości w stosunku do potrzeb praktyki matematycznej, czyli z nadmiernym — w stosunku do potrzeb zwykłej matematyki — bogactwem świata matematycznego opisywanego przez teorię mnogości. Prowadzi to niektórych badaczy do opinii, że teoria mnogości zajmuje się tworzeniem i rozwiązywaniem własnych, wewnętrznych problemów, niemających wiele wspólnego z resztą matematyki. Taką opinię, dotyczącą niejako introwertycznego charakteru współczesnej teorii mnogości, wyraża np. Jensen w [1995, s. 407] (a jako wybitny specjalista z zakresu teorii mnogości z pewnością nie jest nastawiony wobec niej nieprzychylnie…). Mac Lane (jeden z „ojców założycieli” teorii kategorii) twierdzi wręcz, że teoria mnogości (w szczególności np. badania dotyczące dużych liczb kardynalnych) jest teorią dziwaczną i niezrozumiałą. Stanowisko pośrednie reprezentuje np. Friedman. Przyznaje, że problemy teoriomnogościowe nie są reprezentatywne dla matematyki jako całości. Niewątpliwie dla teorii mnogości bardzo ważne (wręcz centralne) są badania dotyczące relatywnej niesprzeczności teorii, niezależności pewnych zdań od teorii mnogości, konstrukcji modeli różnego typu *etc*. Mają one jednak charakter dość „egzotyczny” (często czysto metamatematyczny) i nie wyrastają z codziennej praktyki matematycznej. Friedman twierdzi jednak, że można wskazać naturalne problemy matematyczne, dla rozstrzygnięcia których konieczne jest nie tylko korzystanie z pełnej siły ZFC, ale nawet odwołanie się do założeń silniejszych [Friedman 2000, s. 439-440]. Jego zdaniem, może to świadczyć o tym, że nawet najbardziej zaawansowane teoretycznie pojęcia teorii mnogości nie są „abstrakcyjnym nonsensem”, ale mogą mieć silny i naturalny związek z praktyką matematyczną.[23] Zdecydowanie przeciwko takiemu poglądowi występuje Feferman

---

[22] Oczywiście pojęcie zwykłej praktyki matematycznej jest nieostre, uważam je jednak za ważne dla dyskusji. Szczegółowo będzie ono omawiane w dalszych częściach niniejszego cyklu artykułów. Tu poprzestanę na odwołaniu się do jego potocznego rozumienia.

[23] Friedman podaje takie wyniki w pracach [1981, 1986, 1998]. Problem, na ile te wyniki wyrastają z praktyki matematycznej, a na ile mają charakter sztuczny i zostały stworzone dla uzasadnienia owej tezy, jest problemem złożonym.

Warto tu wspomnieć o wynikach da Costy i współpracowników, którzy podali przykłady zdań

[1987]. Twierdzi on, że jedynie pozornie zjawiska niezależności w tak oczywisty sposób mają znaczenie dla codziennej praktyki matematycznej. Feferman przywołuje tutaj przykład niezależnych zdań Gödla. Zostały one uzyskane poprzez technikę arytmetyzacji składni, i są to zdania dotyczące miejsc zerowych pewnych wielomianów (dość wysokiego stopnia). Nie ulega oczywiście wątpliwości, że są to zdania o charakterze teorioliczbowym. Idąc dalej tym tropem, można byłoby stwierdzić, że tym samym niezależność pojawia się (czy też „odzwierciedla się") w zwykłej praktyce matematycznej (bo zdania teorioliczbowe z tej praktyki niewątpliwie wyrastają). W takiej argumentacji — zdaniem Fefermana — tkwi jednak pewien podstawowy błąd. Zdania arytmetyczne, o których tutaj myślimy, nie są wcale naturalne, zostały one bowiem w sztuczny sposób wytworzone poprzez analizy metamatematyczne. W niczym nie przypominają zdań interesujących specjalistów od teorii liczb, takich jak hipoteza Fermata czy Goldbacha. Zdania tego typu mogą np. opisywać niesprzeczność istotnie różnych od siebie teorii formalnych, a jednak matematyczna treść tych zdań nie będzie się od siebie istotnie różnić.[24] Niezależnie jednak od tego, jakie stanowisko zajmiemy w tej dyskusji, trudno nie przyznać, że problemy teorii mnogości są bez porównania słabiej związane z problemami wyrastającymi z głównego nurtu matematyki niż np. problemy teorii liczb, analizy funkcjonalnej czy geometrii różniczkowej. Najważniejsze otwarte problemy matematyczne nie mają bezpośredniego związku z teorią mnogości.

Pojawia się więc pytanie, czy użycie teorii mnogości jako narzędzia formalnej rekonstrukcji nie staje się w tej sytuacji sztuczne. Gdyby — mówiąc z pewną przesadą — uznać ją za teorię obcą w stosunku do codziennej praktyki matematycznej, to należałoby uznać, że taka rekonstrukcja jest sztuczna.[25] Oczywiście, każdy matema-

---

niezależnych od ZFC, mających — ich zdaniem — sens fizyczny. Zdania te dotyczą teorii układów dynamicznych, mechaniki klasycznej, ogólnej teorii względności czy nawet teorii gier (por. np. [da Costa N., Doria F.A. 1996]). W całej serii artykułów obaj autorzy dowodzą wielu wyników o podobnym charakterze. Gdyby faktycznie uznać, że zdania te mają naturalny sens fizyczny, to moglibyśmy mówić o znaczeniu teorii mnogości nie tylko z punktu widzenia praktyki matematycznej, ale też z punktu widzenia matematyki stosowanej. Zdaniem autorów tych wyników, świadczy to o tym, że „*Niezależność gödlowska nie jest dziwacznym, ubocznym zjawiskiem; jest niezwykle ważna dla naszego sposobu pojmowania matematyki* " [da Costa N.C.A, Doria F.A 1994, s. 188]. Można jednak mieć wątpliwości, czy faktycznie te zdania mają naturalną interpretację fizyczną, czy też raczej są to wyniki *stricte* teoriomnogościowe „w przebraniu". (Omówieniu tych zagadnień poświęcona jest praca [Wójtowicz 2002].)

[24] Podobną opinię Feferman wyraża także w [2000], gdzie analizuje wyniki Friedmana. Zauważmy, że arytmetyczne zdania typu Con(T), wyrażające niesprzeczność teorii T, to zdania o wielomianach. Nie ulega wątpliwości, że teorie np. ZFC+¬CH i ZFC+CH są istotnie różne. Jednak trudno powiedzieć, że zdania Con(ZFC+¬CH) i Con(ZFC+CH) mają również istotnie różną treść **arytmetyczną** (rozpatrywaną w oderwaniu od ich metamatematycznych interpretacji).

[25] Wykonajmy — w charakterze ilustracji — eksperyment myślowy. Wyobraźmy sobie, że matematyka składa się tylko z teorii liczb (i nią zajmują się matematycy) oraz z teorii mnogości. Czy naturalne jest uznanie, że liczby są tak naprawdę zbiorami pewnego typu, czy też raczej matematycy

tyk posługuje się na co dzień pojęciem zbioru czy klasy (nie odróżniając zresztą w codziennym użyciu tych pojęć) — mówi o zbiorze rozwiązań równania, klasie miar określonych na danej przestrzeni, zbiorze punktów stałych przekształcenia *etc*. Pozornie wydaje się więc, że posługuje się teoriomnogościowym systemem pojęć. Jednak te codzienne użycia pojęcia zbioru nie wykraczają poza tzw. naiwną teorię mnogości; mówiąc swobodnie, teoria mnogości „interweniuje" jedynie na bardzo elementarnym poziomie. Matematyk raczej nie odwołuje się np. do twierdzenia o definiowaniu przez indukcję pozaskończoną.[26] Zazwyczaj matematyk nie ma do czynienia z żadnymi pytaniami, które motywowałyby (z punktu widzenia jego dyscypliny) odwoływanie się do pełnej siły teorii mnogości. W swojej praktyce badawczej nie spotka się raczej z problemami o charakterze *stricte* teoriomnogościowym. Obszarem jego zainteresowania są problemy i pojęcia matematyczne wyrastające z codziennej praktyki, teoria mnogości zaś jest jedynie sposobem ich formalnej rekonstrukcji, pewną formalną idealizacją, która pojawia się na etapie metodologicznej refleksji, a nie w trakcie faktycznego uprawiania matematyki. Matematyk może wcale nie być świadomy tego, że badane przez niego obiekty, takie jak np. liczby rzeczywiste czy rozwiązania równań różniczkowych, miewają różne własności w różnych modelach dla teorii mnogości — a nawet jeśli to wie, to może być tym faktem mało zainteresowany. Czy należy uznać to jedynie za wyraz braku świadomości metodologicznej owego matematyka? A może owe zjawiska metamatematyczne stanowią swoisty artefakt przyjęcia — na poziomie metateoretycznym — zbyt silnych założeń? Być może należałoby raczej stwierdzić, że przedmiotem zainteresowania matematyka są właśnie owe liczby rzeczywiste (i równania różniczkowe) jako pewne absolutne obiekty istniejące w sposób samoistny, a nie jako obiekty, których własności zrelatywizowane są do różnych modeli formalnych dla teorii mnogości? I idąc dalej tym tropem, twierdzić, że do owej pierwotnej sytuacji ontologicznej (dotyczącej liczb rzeczywistych i równań różniczkowych) został dobudowany gigantyczny bagaż teorii mnogości, która z ową pierwotną sytuacją nie ma wiele wspólnego?

Można by więc pokusić się o wytyczenie swoistej linii demarkacyjnej pomiędzy matematyką zwykłą i teoriomnogościową. Taki podział matematyki na „zwykłą" i teoriomnogościową jest oczywiście nieostry i do pewnego stopnia umowny, uważam jednak, że ma on sens i istotne znaczenie dla prowadzonej tu dyskusji. Trudno ustalić precyzyjnie granicę, na której kończy się zwykła matematyka, a zaczyna się królestwo teorii mnogości. Jest jednak jasne, że np. geometria różniczkowa nie wykorzystuje zaawansowanych pojęć teorii mnogości, i choć formalnie np. rozmaitość

---

będą bronić się przed tego typu „teoriomnogościowymi wtrętami", twierdząc, że oni badają liczby naturalne *per se*, a nie jakieś skończone liczby porządkowe (stanowiące zaledwie jakiś drobny fragment „rozdętej" hierarchii teoriomnogościowej). Jest to oczywiście sztuczny przykład, ale jednak stanowi pewną ilustrację problemu.

[26] Korzysta wprawdzie niekiedy z lematu Kuratowskiego–Zorna (równoważnego pewnikowi wyboru), ale stosunkowo rzadko potrzebny jest pewnik wyboru w jego pełnej wersji.

różniczkowa może być zdefiniowana w teorii mnogości jako odpowiedni zbiór, to jednak pojęcia geometryczne (takie jak pojęcie rozmaitości, metryki, wiązki wektorowej, tensora *etc.*) są zdefiniowane w sposób niezależny od pojęcia ultrafiltru, współkońcowości, liczby mierzalnej czy konstruowalności. Podobne uwagi dotyczą także pozostałych dyscyplin matematycznych: ważne i podstawowe dla tych dyscyplin motywacje, idee, pojęcia i techniki tworzone były w sposób niezależny od teorii mnogości.

Akceptacja tego podziału ma istotne znaczenie dla problemu redukcji ontologicznej. Bardzo istotny staje się problem rekonstrukcji tego nieteoriomnogościowego fragmentu matematyki w innym niż teoriomnogościowy systemie pojęć. Zauważmy też, że w przypadku różnych dyscyplin matematycznych owe poszukiwane rekonstrukcje mogą mieć różny charakter. A zatem na ogólny problem rekonstrukcji pojęć matematycznych nakłada się dodatkowo problem poszukiwania lokalnych baz ontologicznych (odpowiednich dla pewnych fragmentów matematyki). Te zagadnienia zostaną podjęte w kolejnych częściach pracy.

## BIBLIOGRAFIA

**Chihara C.**

[1990] *Constructibility and mathematical existence*, Clarendon Press, Oxford.

**Da Costa N.C.A., Doria F.A.**

[1994] „Suppes predicates an the construction of unsolvable problems in the axiomatized sciences", w: Humpreys P. (red.) *Patric Suppes: scientific philosopher*, Kluwer Academic Publishers, 151-193.

[1996] „Structures, Suppes Predicates, and Boolean-Valued Models in Physics", w: Bystrov P.I., Sadovsky V.N. (red.), *Philosophical Logic and Logical Philosophy*, Kluwer Academic Publishers, 91-118.

**Descartes R.**

[1958] *Prawidła kierowania umysłem; poszukiwanie prawdy przez światło przyrodzone rozumu.* PWN, Warszawa.

**Feferman S.**

[1987] „Infinity in Mathematics: Is Cantor Necessary?", w: Di Francia G.T. (red.), *L'infinito nella scienza*, Instituto della Enciclopedia Italiana, Roma, 151-209.

[2000] „Why the programs for new axioms need to be questioned", *The Bulletin of Symbolic Logic*, 6, 401-413.

**Field H.**

[1980] *Science Without Numbers*, Basil Blackwell, Oxford.

**Friedman H.**

[1981] „On the necessary use of abstract set theory", *Advances in Mathematics*, 41, 209-280.

[1986] „Necessary uses of abstract set theory in finite mathematics", *Advances in Mathematics*, 60, 92-122.

[1998] „Finite functions and the necessary use of large cardinals”, *Annals of Mathematics*, 148, 803-893.

[2000] „Normal mathematics will need new axioms”, *The Bulletin of Symbolic Logic*, 6, 434-446.

**Gray J.**

[1989] *Ideas of Space, Euclidean, Non-Euclidean and Relativistic,* 2 wyd., Oxford University Press, Oxford.

**Hellman G.**

[1989] *Mathematics without Numbers*, Clarendon Press, Oxford.

**Jensen R.**

[1995] „Inner models and large cardinals”, *Bulletin of Symbolic Logic*, 1, 393-407.

**Maddy P.**

[1988] „Believing the axioms. I”, *Journal of Symbolic Logic*, 53, 481-511.

[1988a] „Believing the axioms. II”, *Journal of Symbolic Logic*, 53, 736-764.

[1993] „Does V equal L?”, *Journal of Symbolic Logic*, 58, 15-41.

**Mill J.St.**

[1962] *System logiki dedukcyjnej i indukcyjnej. Tom I.* Państwowe Wydawnictwa Naukowe, Warszawa.

**Murawski R.**

[1986] *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*. (red.), Wydawnictwa UAM, Poznań.

**Pasch M.**

[1882] *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Teubner, Leipzig.

**Shapiro S.**

[1996] „Space, Number and Structure: A Tale of Two Debates”, *Philosophia Mathematica,* 3 (4), 148-173.

**Wójtowicz K.**

[2002] „Kilka uwag o problemie niezależności w matematyce”, *Przegląd Filozoficzny*, 1 (41), 65-82.