Filozofia Nauki
Rok XIV, 2006, Nr 2(54)

Marek Magdziak

Czy pojęcie prawdy jest konstruktywne?

> Szedł przez pola i lasy, przez drogi bite i nie bite, przez miasta warowne i nie warowne, przez mosty zwodzone i nie zwodzone, aż wreszcie zobaczył drogowskaz, na którym było napisane:
>
> ZIELONA GÓRA
>
> — Pięknie się nazywa — powiedział sam do siebie i poszedł w tę stronę, którą drogowskaz wskazywał.
>
> Stefan Themerson, *Przygody Pędrka Wyrzutka*[1]

Korzenie pojęcia prawdy tkwią w myśleniu potocznym. Pojęcie to pojawiło się *explicite* wraz z pytaniem o to, jakie przekonania zasługują (w określonych okolicznościach) na to, by je żywić i uznawać ich treści, a jakie na to nie zasługują, a treści ich winny zostać (w owych okolicznościach) odrzucone. Trwała obecność pojęcia prawdy w myśleniu potocznym to rezultat współdziałania dwóch czynników. Z jednej strony świadomości istnienia ogromnie, a nawet nadspodziewanie wielu przekonań, które wszystkie domagają się uznania ich treści, a z drugiej strony silnego przeświadczenia, że nie wszystkie one na uznanie takie zasługują. Wiąże się więc także z pytaniem, które zawsze i odnośnie do każdego przekonania można zasadnie postawić, a mianowicie, czy (w określonych okolicznościach) warto to przekonanie żywić. Przywiązanie do tego pojęcia opiera się więc na domniemaniu, że nie wszystkie, tak przecież liczne, przekonania są równocenne.

Uznanie doniosłości pojęcia prawdy nieuchronnie prowadzi do pytania o to, czym właściwie są przekonania i dlaczego jedne z nich warto żywić, a innych nie

[1] S. Themerson, *Przygody Pędrka Wyrzutka*, Warszawa 2002, Wydawnictwo ISKRY, s. 95-96.

warto, czyli w istocie do pytania o to, na czym polega prawda i fałsz. W konsekwencji prowadzi więc także do prób formułowania definicji charakteryzujących treść pojęcia prawdy.

Analizując treść pojęcia prawdy, Kazimierz Ajdukiewicz pisał:

> Treści tego pojęcia lepiej odpowiada definicja klasyczna, wedle której myśl prawdziwa to taka myśl, która zgodna jest z rzeczywistością. […] Że jakieś twierdzenie jest zgodne z rzeczywistością — to znaczy, że jest tak właśnie, jak to twierdzenie głosi. A więc myśl, że Ziemia jest okrągła, jest zgodna z rzeczywistością, ponieważ Ziemia jest okrągła, myśl, że Słońce jest większe od Ziemi, jest zgodna z rzeczywistością, ponieważ Słońce istotnie jest większe od Ziemi. Wobec tego zasadniczą myśl klasycznej definicji prawdy wyrazić można w sposób następujący: Myśl m jest prawdziwa — to znaczy: myśl m stwierdza, że jest tak a tak, i rzeczywiście jest tak a tak. Z tym ostatnim sformułowaniem klasycznej definicji prawdy łączą się pewne trudności natury logicznej, które nakazują dużą ostrożność w posługiwaniu się tą definicją.[2]

Tadeusz Kotarbiński w podobnej sprawie pisał z kolei:

> Przejdźmyż tedy do doktryny klasycznej i zapytajmy, co tu się rozumie przez ową „zgodność z rzeczywistością". Nie idzie wszak o to, że myśl prawdziwa ma być dobrą kopią, czyli wierną podobizną rzeczy, o której myślimy, na wzór kopii malarskiej lub fotografii. Chwila zastanowienia wystarczy, by utwierdzić metaforyczny charakter takiego porównania. Tu potrzebna staje się jakaś inna interpretacja owej „zgodności z rzeczywistością". Poprzestańmy na interpretacji następującej: „Jan myśli prawdziwie zawsze i tylko, jeżeli Jan myśli, że tak a tak rzeczy się mają, i jeżeli przy tym rzeczy się mają tak właśnie." Dla kogo sens tej formułki nie jest dość jasny, temu przyda się rozważenie paru przykładów jej zastosowania. Oto np. myśl główna doktryny Kopernika jest myślą, że Ziemia obraca się dokoła Słońca. I otóż Kopernik myślał prawdziwie. Myślał bowiem, że Ziemia obraca się dokoła Słońca; i Ziemia obraca się dokoła Słońca. Odwrotnie rzecz ma się z fałszywością. Np. fałszywa jest myśl Priestleya dotycząca roli tlenu w procesie spalania. Mianowicie, jest to myśl, że spalanie nie jest utlenianiem. Priestley myślał fałszywie, gdyż myślał, że spalanie nie jest utlenianiem; a spalanie jest utlenianiem.[3]

W obu przytoczonych fragmentach mowa jest o prawdziwości myśli. Jednak, nie odbiegając zbytnio od intencji obu cytowanych autorów, równie dobrze mówić można o prawdziwości wypowiedzi lub przekonań, czyli aktów, które o czymś mówią, coś głoszą lub coś twierdzą. Dlatego wypowiedzi, przekonania czy inne akty, o których sensownie orzekać można prawdę lub fałsz, odsyłają zawsze do swych treści propozycjonalnych wyrażanych zwykle przez sensowne zdania oznajmujące. Wypowiedź lub przekonanie jest bowiem prawdziwe lub fałszywe ze względu na swoją treść propozycjonalną, czyli na to, co głosi.

Z drugiej strony, uznanie dowolnej wypowiedzi czy przekonania za prawdziwe jest równoważne z uznaniem wszystkiego tego, co ta wypowiedź lub to przekonanie głosi.

---

[2] K. Ajdukiewicz, *Zagadnienia i kierunki filozofii*, Warszawa 1983, Czytelnik, s. 38-39.

[3] T. Kotarbiński, *Dzieła Wszystkie I, Elementy teorii poznania, logiki formalnej i metodologii nauk*, Wrocław 1990, Ossolineum, s. 116-117.

Wszystko to skłania do przyjrzenia się wyrażeniom postaci: *p głosi, że P.*

Litera *p* oznacza tutaj wypowiedź, przekonanie lub jakikolwiek inny akt, który o czymś mówi, coś głosi lub też coś stwierdza. Akt taki będziemy nazywać oznajmieniem, przekonaniem lub wypowiedzią. Chodzi tu przy tym o akty rozumiane jako obiekty ogólne, czyli o akty typy. Przyjmujemy bowiem, że jedno i to samo przekonanie żywić mogą różne osoby w różnych okolicznościach, choć spełniają one przy tym także różne inne akty psychiczne swoiste tylko dla nich i dla okoliczności, w których się znaleźli. Podobnie, jedna i ta sama wypowiedź może zostać wygłoszona przez różne osoby w różnych okolicznościach, mimo że osoby te podejmują przy tym także pewne inne jednostkowe działania egzemplarze.

Litera *P* może zaś zostać zastąpiona przez pewne zdanie oznajmujące wyrażające pewną określoną treść propozycjonalną. Litera ta nie oznacza jednak ani nie reprezentuje zdania, lecz treść propozycjonalną, która jedynie może zostać wyrażona przez zdanie.

Przez treść propozycjonalną rozumieć tutaj będziemy mniej więcej to, co Church nazywał *sądem w sensie abstrakcyjnym* (*proposition in the abstract sense*[4]), a Stalnaker, po prostu *sądem* (*proposition*).[5] Nie będziemy jednak używać terminu *sąd*, stosowanego zwykle jako polski odpowiednik angielskiego terminu *proposition*, gdyż termin ten w polskim piśmiennictwie filozoficznym używany bywa także w innym, choć nieco pokrewnym sensie.[6] Treści propozycjonalne to pewne partycje, wyodrębniające w określonej klasie wszystkich możliwych okoliczności dwie wykluczające się, a zarazem dopełniające się podklasy.

Dodajmy jeszcze, że świadomie unikamy dość rozpowszechnionego zwyczaju nakazującego mówić o prawdzie i fałszu zdań. Zdania rozumiane jako pewnego rodzaju wyrażenia językowe o określonych z góry sensach (np. poprzez ustalone uprzednio znaczenia tworzących je symboli oraz przyjęte reguły kompozycji determinujące znaczenia dla skończonych ciągów symboli) nie są dosłownie rzecz biorąc ani prawdziwe, ani fałszywe. Dopiero wypowiadając takie zdania (w określonych okolicznościach) lub formułując przy ich pomocy przekonania możemy mówić prawdę lub myśleć prawdziwie. Są oczywiście i takie zdania, że każde ich wypowiedzenie lub pomyślenie stanowi wypowiedź lub przekonanie prawdziwe. Można więc, skrótowo rzecz ujmując, twierdzić na przykład, że zdanie 'śnieg jest biały' jest prawdziwe. Jest to jednak parafraza bardziej rozbudowanego zwrotu, a mianowicie: wypowiadając słowa 'śnieg jest biały' zawsze (lub prawie zawsze) mówimy prawdę. Podobnie rzecz ma się z fałszem. Dlatego zdanie rozpatrywane pod kątem prawdy

[4] A. Church, *Propositions and Sentences*, [w:] *The Problem of Universals*, University of Notre Dame Press, Notre Dame, Indiana 1956, s. 3-11.

[5] R.C. Stalnaker, *Pragmatics*, [w:] *Semantics of Natural Language*, red. D. Davidson, G. Harman, Dordrecht, Holland 1972, D. Reidel Publishing Company, s. 380-397.

[6] Por. np. T. Czeżowski, *Główne zasady nauk filozoficznych*, Toruń 1946, Nakładem Księgarni Naukowej T. Szczęsny i S-ka, s. 6-8; G. Frege, *Pisma semantyczne*, przeł. B. Wolniewicz, Warszawa 1977, PWN, s. 107-109; R. Ingarden, *O Dziele literackim*, Warszawa 1988, PWN, s. 229-237.

lub fałszu ujmowane jest zawsze jako składowa pewnego oznajmienia, czyli pewnego aktu, którego dokonując posługujemy się tym właśnie zdaniem. Ujawnia ono tym samym swój aspekt pragmatyczny. Z drugiej jednak strony zdanie rozpatrywać można także jako reprezentanta pewnej treści propozycjonalnej. Ujawnia ono wtedy swój aspekt semantyczny.[7] Mówienie po prostu o prawdziwości zdań może więc doprowadzić do zaniku tego ważnego rozróżnienia pomiędzy pragmatyczną rolą zdania jako składowej pewnego oznajmiania a semantyczną funkcją zdania jako reprezentanta określonej treści propozycjonalnej. Dokonując aktu oznajmienia posługujemy się bowiem zdaniem, aby ocenić okoliczności, w których się znajdujemy z uwagi na pewną treść propozycjonalną. Natomiast rozpatrując samo tylko zdanie jako zdanie sensowne, wyodrębniamy jedynie pewną treść.

Po tych kilku wyjaśnieniach sformułujmy trzy następujące ustalenia wstępne.

Po pierwsze, każda wypowiedź posiada jakąś treść propozycjonalną, która może być reprezentowana przez pewne zdanie oznajmujące. To znaczy, dla dowolnie ustalonego oznajmienia p istnieje taka treść propozycjonalna P, że p głosi, że P. Ustalenie to jest więc wyrazem poglądów racjonalistycznych. Odrzucenie go oznacza bowiem przyznanie, że istnieją takie przekonania, a zatem takie nośniki prawdy lub fałszu, które nie posiadają żadnych treści propozycjonalnych. Jego akceptacja nie oznacza jednak, że dla każdego przekonania zawsze można efektywnie wskazać (np. wypowiedzieć) zdanie oznajmujące, które reprezentuje jego treść propozycjonalną. Zdanie takie nie musi bowiem wcale należeć do języka, którym możemy się posłużyć. Dlatego kwantyfikator szczegółowy nie powinien być tutaj interpretowany podstawieniowo. Kwantyfikujemy bowiem nie po zdaniach, lecz po treściach propozycjonalnych, które jedynie mogą być wyrażane przez zdania.

Po drugie, jeśli dowolnie ustalona wypowiedź p głosi, że P, to wypowiedź p jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy P. Ustalenie to nazwać można zasadą poprawności merytorycznej. Ustala ono bowiem warunek poprawnego użycia słów '*jest prawdziwe*' jako orzecznika wyrażającego prawdę w sensie logicznym.

Po trzecie, jeśli dowolnie ustalona wypowiedź p głosi, że P, a przy tym wypowiedź p głosi, że Q, to także P wtedy i tylko wtedy, gdy Q. Jak łatwo zauważyć, trzecie ustalenie wstępne wynika logicznie z drugiego. Ustalenie to nazwiemy zasadą lokalnej jednoznaczności przekonań. Wskazuje ona pewien ważny aspekt wyrażania treści propozycjonalnych przez wypowiedzi czy przekonania. Chodzi o to, że w dowolnie ustalonych okolicznościach treści propozycjonalne ustalonej wypowiedzi wyznaczone są z dokładnością do równoważności materialnej. Nie można więc — na przykład — twierdzić, że treści propozycjonalne pewnej wypowiedzi reprezentują dwa różne zdania sensowne i przy tym uznawać jedno z tych zdań, a drugie odrzucać. Zwróćmy uwagę, że zasada ta nie przypisuje wypowiedziom absolutnej jednoznaczności co do ich treści. Dwa różne zdania sensowne reprezentujące treści propozycjonalne jednej i tej samej wypowiedzi nie muszą być bowiem równoważne lo-

[7] R. Stalnaker, *Pragmatics…*, *op. cit.*

gicznie. Natomiast w dowolnie ustalonych okolicznościach, w których jedna i ta sama wypowiedź wyraża treści propozycjonalne reprezentowane przez dwa różne zdania sensowne, oba te zdania można tylko albo razem uznać, albo razem odrzucić. Zasada ta przypisuje więc wypowiedziom jedynie jednoznaczność lokalną względem dowolnie ustalonych okoliczności.

Z zasady lokalnej jednoznaczności przekonań wynika w szczególności, że

(a) dla dowolnie ustalonej wypowiedzi *p*, nie istnieje taka treść propozycjonalna *P,* że *p* głosi, że *P* oraz *p* głosi, że ~ *P*, a więc także, że

(b) dla dowolnie ustalonej wypowiedzi *p* nieprawda, że dla każdej treści propozycjonalnej *P*, *p* głosi, że *P*, oraz, że

(c) dla dowolnie ustalonej wypowiedzi *p*, jeśli istnieje taka treść propozycjonalna *P*, że *p* głosi, że *P*, to także istnieje taka treść propozycjonalna *Q*, że nieprawda, że *p* głosi, że *Q*.

Za podstawowe zasady logiczne uznamy teraz pierwsze i trzecie z przedstawionych właśnie ustaleń. Pojęcie prawdy wprowadzimy natomiast definicyjnie. Ustalenie drugie uznamy zaś za warunek poprawności merytorycznej dla formuł definiujących pojęcie prawdy.

Przejdźmy zatem do definicji charakteryzującej treść pojęcia prawdy. Otóż obydwa zacytowane fragmenty sugerują, że wypowiedź prawdziwa to taka wypowiedź, która głosi jedynie to, że „jest tak a tak" i przy tym „jest tak a tak". Jeśli litera *P* będzie zastępować dowolne zdanie oznajmujące lub reprezentować dowolną treść propozycjonalną, to można powiedzieć, że dowolnie ustalona wypowiedź *p* jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy wypowiedź *p* głosi, że *P* oraz *P*.

Podkreślmy jednak, że jest to definicja charakteryzująca treść pojęcia prawdy. Dlatego, używając sformułowania Ajdukiewicza, można powiedzieć, że ustala ona, co znaczy, że myśl *m* jest prawdziwa. Warunek poprawności merytorycznej zapewnić ma zaś, że definicja ta przypisuje pojęciu prawdy treść zgodną z faktycznym sposobem posługiwania się tym pojęciem w myśleniu potocznym. Nie jest to natomiast definicja podająca jednoznaczną charakterystykę cechy, która przysługuje wszystkim wypowiedziom prawdziwym i tylko wypowiedziom prawdziwym oraz sprawia, że są one prawdziwe. Taka definicja musiałaby bowiem określać związek, jaki zachodzi pomiędzy wypowiedziami a ich treściami oraz zdawać sprawę z tego, na czym polega zachodzenie treści propozycjonalnych. Ta ostatnia kwestia nie będzie nas tu w ogóle interesować.

Przedstawione wyżej sformułowanie definicji charakteryzującej treść pojęcia prawdy prowadzi jednak do pewnych niejasności. Czy w definicji charakteryzującej treść pojęcia prawdy chodzić powinno o zupełnie dowolną treść propozycjonalną, czy też o jedną spośród ustalonych już treści propozycjonalnych (np. poprzez skojarzenie z ustalonym wyrażającym ją sensownym zdaniem oznajmującym)? Co za tym idzie, czy litera *P* reprezentować ma zupełnie dowolną treść propozycjonalną, czy też jedną spośród ustalonych już treści propozycjonalnych, na przykład takich, które zostały już wyrażone w języku i tym samym wyodrębnione przez pewne sensowne zdania oznajmujące?

I.

(I. 1) Jak już powiedzieliśmy, w wyrażeniu postaci: *wypowiedź p głosi, że P*, litera P nie oznacza ani nie reprezentuje zdania, lecz pewną treść propozycjonalną. Tym, co głosi ustalona wypowiedź, nie jest bowiem samo zdanie, lecz co najwyżej jego treść. Dlatego dla dowolnie ustalonej wypowiedzi p, wyrażenie '*p głosi, że*' uznać możemy za pewnego rodzaju operator modalny wiążący treści propozycjonalne. Z drugiej strony, ponieważ istotną cechą każdej wypowiedzi jest to, że wyraża ona pewną treść propozycjonalną, logiczną analizę wypowiedzi możemy oprzeć na logicznej analizie wyrażeń postaci '*p głosi, że P*'.

Formalnym odpowiednikiem poczynionych już ustaleń, a także podstawowym narzędziem logicznym, którym posługiwać się będziemy w dalszej części rozważań, będzie zatem pewna multimodalna logika zdaniowa z kwantyfikatorem propozycjonalnym. W języku tej logiki jednoargumentowe operatory modalne stanowić będą formalne odpowiedniki wypowiedzi, zaś formuły poprawnie zbudowane reprezentować będą treści propozycjonalne. Logikę tę, którą teraz opiszemy, nazywać będziemy logiką M.

(I. 2) Słownik języka logiki M zawiera jedynie następujące symbole:

(S1) stałe zdaniowe: $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, … , oznaczające ustalone treści propozycjonalne,

(S2) zmienne zdaniowe: P_0, P_1, P_2, …, reprezentujące dowolne treści propozycjonalne,

(S3) spójnik negacji, koniunkcji i implikacji materialnej: $\sim$, $\&$, $\rightarrow$,

(S4) jednoargumentowe operatory modalne: $[p_0]$, $[p_1]$, $[p_2]$….

(S5) kwantyfikator szczegółowy: $\exists$, oraz

(S6) nawiasy: (,).

Napis $\mathbf{P}_i$ zastępować będzie i-tą stałą zdaniową, napis P_j zastępować będzie j-tą zmienną zdaniową, zaś napis $[p_k]$ zastępować będzie k-ty operator modalny, gdzie i, j, i $k \in \mathbf{N}$.

Symbole $[p]$, $[q]$ itd. zastępować będą dowolnie ustalone operatory modalne, symbole **P, Q, R,** … zastępować będą dowolnie ustalone stałe zdaniowe, zaś symbole P, Q, R,… zastępować będą dowolnie ustalone zmienne zdaniowe.

Wyrażeniem języka logiki M nazywać będziemy każdy skończony ciąg symboli należących do słownika języka logiki M.

Napis postaci $\alpha\{s\}$ rozumieć będziemy jako wyrażenie zawierające jako pewien swój wyraz symbol s. Przez $\alpha\{\beta/s\}$ rozumieć będziemy wyrażenie powstałe przez zastąpienie w wyrażeniu α symbolu s we wszystkich miejscach wyrażeniem β.

Zbiór formuł poprawnie zbudowanych logiki M, lub krótko formuł, to najmniejszy zbiór Z taki, że:

(1) dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej i, $\mathbf{P}_i \in$ Z,

(2) jeśli $A \in$ Z, to $\sim A \in$ Z,

(3) jeśli $A \in$ Z i $B \in$ Z, to $(A \,\&\, B) \in$ Z,

(4) jeśli $A \in$ Z i $B \in$ Z, to $(A \rightarrow B) \in$ Z,

(5) jeśli $A\{\mathbf{P}\} \in$ Z, to $(\exists P)(A\{P/\mathbf{P}\}) \in$ Z, o ile P nie występuje w formule $A\{\mathbf{P}\}$,

(6) jeśli $A \in$ Z, to dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej k, $[p_k]A \in$ Z.

Zbiór ten oznaczać będziemy symbolem For. Zauważmy, że formuły poprawnie zbudowane nie mogą zawierać zmiennych wolnych.

Litery A, B, C … zastępować będą dowolnie ustalone formuły poprawnie zbudowane. Formułę postaci $[p]A$ czytamy: *wypowiedź p głosi, że A*.

Pozostałe spójniki klasycznego rachunku zdań oraz kwantyfikator ogólny wprowadzamy jako skróty definicyjne w zwykły sposób.

Zbiór twierdzeń logiki M, lub krótko twierdzeń, to najmniejszy zbiór zawierający:

(**A0**) wszystkie formuły będące podstawieniami tautologii KRZ,

(**A1**) wszystkie formuły postaci $A\{B/\mathbf{P}\} \rightarrow (\exists P)(A\{P/\mathbf{P}\})$,

o ile zmienna P nie występuje w formule $A\{\mathbf{P}\}$,

(**A2**) wszystkie formuły postaci $(\exists P)([p]P)$,

(**A3**) wszystkie formuły postaci $(\forall P)(\forall Q)(([p]P \,\&\, [p]Q) \rightarrow (P \equiv Q))$,

oraz domknięty na:

(**R0**) regułę odrywania: $A \rightarrow B, A \,/\, B$,

(**R1**) regułę wprowadzania kwantyfikatora szczegółowego:

$A\{\mathbf{P}\} \rightarrow B \,/\, (\exists P)(A\{P/\mathbf{P}\}) \rightarrow B$, o ile stała **P** nie występuje w formule B, oraz

(**R2**) regułę ekstensjonalności: $A \equiv B \,/\, [p]A \equiv [p]B$.

Zbiór ten będziemy oznaczać literą M.

Schemat (**A2**) to formalny odpowiednik pierwszego wstępnego ustalenia, zaś schemat (**A3**) to formalny odpowiednik trzeciego wstępnego ustalenia.

(I. 3) Powiemy, że formuła A jest wyprowadzalna ze zbioru formuł X, gdy istnieje taki skończony podzbiór zbioru X, $\{B_0, B_1, B_2, \ldots, B_k\}$, że formuła $(B_0 \,\&\, B_1 \,\&\, B_2 \,\&\ldots\&\, B_k) \rightarrow A$ jest twierdzeniem.

Powiemy także, że zbiór formuł X jest sprzeczny, gdy istnieje taka formuła A, że formuły A i $\sim A$ są wyprowadzalne ze zbioru X.

Powiemy wreszcie, że zbiór formuł X jest niesprzeczny, gdy nie jest on sprzeczny. Oczywiście jeśli zbiór formuł X jest niesprzeczny i formuła A nie jest wyprowadzalna ze zbioru X, to zbiór formuł X $\cup\{\sim A\}$ także jest niesprzeczny.

Przez C_1 oznaczać będziemy strukturalną operację konsekwencji zdefiniowaną następująco: dla dowolnego zbioru formuł X, C_1(X) to najmniejszy zbiór formuł zawierający X $\cup$ M oraz domknięty na regułę odrywania. Oczywiście dowolna formuła jest wyprowadzalna ze zbioru X wtedy i tylko wtedy, gdy formuła ta należy do C_1(X). Ponadto, zbiór formuł X jest sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy C_1(X) = For.

Powiemy, że zbiory formuł X i Y są inferencyjnie równoważne na gruncie logiki M, gdy $C_1(X) = C_1(Y)$. Powiemy także, że zbiór formuł X jest inferencyjnie silniejszy od zbioru formuł Y, na gruncie logiki M, gdy $C_1(Y) \subset C_1(X)$, gdzie $\subset$ oznacza inkluzję właściwą.

(I. 4) W dalszej części wskażemy na kilka interesujących faktów dotyczących logiki M. Dowody pomijamy ze względu na ich czysto formalny i rachunkowy charakter.

Na początek przyjmijmy jednak jeszcze kilka ustaleń pomocniczych. Niech J będzie językiem zdaniowym, którego słownik zawiera jedynie następujące symbole:

(S*1) symbole zdaniowe pierwszego typu: $P_0, P_1, P_2, \ldots$,

(S*2) symbole zdaniowe drugiego typu: $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots$,

(S*3) spójniki klasycznego rachunku zdań: $\sim$, & , $\rightarrow$, oraz

(S*4) nawiasy: (,).

Napis P_i zastępować będzie *i*-ty symbol zdaniowy pierwszego typu, a napis Q_j zastępować będzie *j*-ty symbol zdaniowy drugiego typu.

Zbiór formuł poprawnie zbudowanych języka J definiujemy indukcyjnie w zwykły sposób. Symbole 1 i 0 zastępować będą, odpowiednio, dowolnie ustaloną formułę języka J, która jest tautologią klasycznego rachunku zdań, oraz dowolnie ustaloną formułę języka J, która jest kontrtautologią klasycznego rachunku zdań.

Niech V będzie z kolei funkcją odwzorowującą zbiór formuł logiki M w zbiór poprawnie zbudowanych formuł języka zdaniowego J taką, że

$V(\mathbf{P}_i) = \mathrm{P}_i$,

$V(\sim A) = \sim V(A)$,

$V(A \mathbin{\&} B) = V(A) \mathbin{\&} V(B)$,

$V(A \rightarrow B) = V(A) \rightarrow V(B)$,

$V((\exists P_j)(A\{P_j/\mathbf{P}_i\})) = V(A\{1/\mathbf{P}_i\}) \vee V(A\{0/\mathbf{P}_i\})$,

$V([p_k]A) = (\mathrm{Q}_k \equiv V(A))$.

(I. 5) Można teraz pokazać, że jeśli jakakolwiek formuła A logiki M jest twierdzeniem, to formuła $V(A)$ jest tautologią klasycznego rachunku zdań. Dlatego zbiór twierdzeń logiki M jest niesprzeczny. Nie istnieje bowiem taka formuła A, że A jest twierdzeniem, a zarazem $\sim A$ jest twierdzeniem.

Logika M jest więc poprawnym formalnie odpowiednikiem dotychczasowych ustaleń, a także bezpiecznym narzędziem logicznym dla dalszych rozważań.

(I. 6) Można także udowodnić, że każda formuła postaci $\sim (\exists P)([p]P \mathbin{\&} [p]\sim P)$ jest twierdzeniem, każda formuła postaci $\sim (\forall P)([p]P)$ jest twierdzeniem, a więc także każda formuła postaci $(\exists P)([p]P) \rightarrow (\exists P)(\sim [p]P)$ jest twierdzeniem.

Fakty te są sformalizowanymi wersjami sformułowanych już wcześniej wniosków, powiadających, że nie istnieje taka wypowiedź, która wyraża wzajemnie sprzeczne treści propozycjonalne, nie istnieje taka wypowiedź, która wyraża wszystkie treści propozycjonalne oraz każda wypowiedź, która wyraża jakąś treść propozycjonalną także jakiejś treści propozycjonalnej nie wyraża.

II.

(II. 1) To, że dowolnie ustalona wypowiedź p jest prawdziwa, będziemy zapisywać za pomocą skrótu T(p). Język logiki M można więc teraz wzbogacić, rozszerzając zbiór stałych zdaniowych tego języka o przeliczalnie wiele napisów T(p_0), T(p_1), T(p_2),… , a dla dowolnej liczby naturalnej k napis T(p_k) czytać: *wypowiedź* p_k *jest prawdziwa*. Tak otrzymany język będziemy oznaczać symbolem For_T. Dla dowolnej liczby naturalnej k, przez T(p_k) oznaczać będziemy k-ty wyraz ciągu T(p_0), T(p_1), T(p_2), … .

Przez schemat definicyjny wyznaczający pojęcie prawdy rozumieć będziemy dowolnie ustalony schemat:

(**S**) $\mathrm{T}(p_k) \equiv^{\mathrm{df}} A\{[p_k]\}$.

Prawą stronę równoważności definicyjnej nazywać będziemy formułą definiującą pojęcie prawdy. Formuła ta nie może oczywiście zawierać żadnego spośród symboli T(p_0), T(p_1), T(p_2),… .

Niech X_S oznacza zbiór zawierający, jako swe elementy, jedynie wszystkie formuły podpadające pod ustalony schemat definicyjny (**S**).

Dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej k, niech X_k oznacza z kolei zbiór zawierający, jako swe elementy, jedynie wszystkie formuły postaci $\sim([p_k]\mathbf{P}\ \&\ \mathbf{P})$. Uznając wszystkie zdania należące do zbioru X_k, dla dowolnej stałej zdaniowej **P** przeczymy więc temu, że wypowiedź p_k głosi, że **P**, a przy tym **P**. Żaden element ciągu wszystkich stałych zdaniowych nie pozwala wtedy na wyodrębnienie takiej treści propozycjonalnej P, że wypowiedź p_k głosi, że P, a przy tym P.

Powiemy, że schemat definicyjny (**S**) wyznacza niekonstruktywne pojęcie prawdy, gdy dla każdej formuły postaci T(p_k), zbiór $\{\mathrm{T}(p_k)\} \cup \mathrm{X}_\mathrm{S} \cup \mathrm{X}_k$ jest niesprzeczny. Natomiast jeśli dla każdej formuły postaci T(p_k), zbiór $\{\mathrm{T}(p_k)\} \cup \mathrm{X}_\mathrm{S} \cup \mathrm{X}_k$ jest sprzeczny, to powiemy, że schemat definicyjny (**S**) wyznacza konstruktywne pojęcie prawdy. Dlatego posługując się schematem definicyjnym wyznaczającym niekonstruktywne pojęcie prawdy możemy twierdzić, że dowolnie ustalona wypowiedź p jest prawdziwa, a zarazem dla dowolnej stałej zdaniowej **P**, przeczyć temu, że p głosi, że **P**, oraz **P**. Uznanie prawdziwości pewnych wypowiedzi nie wymusza więc logicznie odwoływania się ani *explicite*, ani *implicite* do zdań wyrażających ich treści. Natomiast posługując się schematem definicyjnym wyznaczającym konstruktywne pojęcie prawdy ilekroć twierdzimy, że pewna wypowiedź jest prawdziwa, musimy przynajmniej *implicite* odwołać się do zdania wyrażającego jej treść.

(II. 2) Treść drugiego ustalenia wstępnego możemy zapisać w postaci schematu:

(**T**) $(\forall P)([p_k]P \rightarrow (\mathrm{T}(p_k) \equiv P))$.

Powiemy, że schemat ten określa warunek poprawności merytorycznej dla formuły definiującej pojęcie prawdy. To znaczy, dowolnie ustalony schemat definicyjny $\mathrm{T}(p_k) \equiv^{\mathrm{df}} A\{[p_k]\}$ jest poprawny merytorycznie, gdy każda formuła postaci $(\forall P)([p_k]P \rightarrow (A\{[p_k]\} \equiv P))$ jest twierdzeniem.

Niech $\mathrm{X_T}$ oznacza zbiór zawierający, jako swe elementy, jedynie wszystkie formuły podpadające pod schemat (**T**).

(II. 3) Przyjmijmy teraz jeszcze jedno ustalenie pomocnicze.

Niech V_T będzie funkcją odwzorowującą zbiór $\mathrm{For_T}$ w zbiór poprawnie zbudowanych formuł opisanego wcześniej języka zdaniowego J taką, że

$V_T(\mathbf{P}_i) = \mathrm{P}_i$,
$V_T(\sim A) = \sim V_T(A)$,
$V_T(A \ \& \ B) = V_T(A) \ \& \ V_T(B)$,
$V_T(A \rightarrow B) = V_T(A) \rightarrow V_T(B)$,
$V_T((\exists P_j)(A\{P_j/\mathbf{P}_i\})) = V_T(A\{1/\mathbf{P}_i\}) \vee V_T(A\{0/\mathbf{P}_i\})$,
$V_T([p_k]A) = (\mathrm{Q}_k \equiv V_T(A))$,
$V_T(\mathrm{T}(p_k)) = \mathrm{Q}_k$.

(II. 4) Można teraz pokazać, że jeśli jakakolwiek formuła A języka $\mathrm{For_T}$ jest twierdzeniem logiki M, to formuła $V_T(A)$ jest tautologią klasycznego rachunku zdań. Ponadto, jeśli jakakolwiek formuła A języka $\mathrm{For_T}$ jest elementem zbioru $\mathrm{C_1(X_T)}$, to formuła $V_T(A)$ jest tautologią klasycznego rachunku zdań. Dlatego zbiór $\mathrm{C_1(X_T)}$ jest niesprzeczny. Przyjęcie schematu (**T**), nie powodując sprzeczności, jest więc dopuszczalne na gruncie logiki M.

(II. 5) Rozważmy najpierw taką definicję pojęcia prawdy, w myśl której wypowiedź jest prawdziwa, gdy wyraża pewną treść propozycjonalną taką, która zachodzi. Wypowiedź *p* jest więc prawdziwa, gdy istnieje taka treść propozycjonalna *P*, że *p* głosi, że *P.*, a przy tym *P*. Użyte w tej definicji wyrażenie kwantyfikujące dotyczy wszelkich możliwych treści propozycjonalnych. Dlatego powiemy, że definicja ta wyznacza absolutne pojęcie prawdy.

Przyjmijmy więc następującą równoważność definicyjną:

(**D**) $\mathrm{T}(p_i) \equiv^{\mathrm{df}} (\exists P)([p_i]P \ \& \ P)$.

Powiemy, że równoważność ta wyznacza absolutne pojęcie prawdy.

Niech $\mathrm{X_D}$ oznacza zbiór zawierający, jako swe elementy, jedynie wszystkie formuły podpadające pod schemat (**D**).

(II. 6) Dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej *k*, zbiór $C_1(\{\mathrm{T}(p_k)\} \cup \mathrm{X_D})$ nie zawiera żadnej formuły postaci $[p_k]\mathbf{P} \ \& \ \mathbf{P}$. Dlatego zbiór $\{\mathrm{T}(p_k)\} \cup \mathrm{X_D} \cup \mathrm{X}_k$ jest niesprzeczny. Posługując się zdefiniowaną wcześniej funkcją *V*, odwzorowującą zbiór formuł logiki M w zbiór poprawnie zbudowanych formuł języka zdaniowego J, można bowiem pokazać, że żadna implikacja postaci $(\exists P)([p]P \ \& \ P) \rightarrow ([p]\mathbf{P} \ \& \ \mathbf{P})$

nie jest twierdzeniem. Dlatego dla dowolnie ustalonej formuły postaci $\mathrm{T}(p_k)$, żadna formuła postaci $[p_k]\mathbf{P}$ & $\mathbf{P}$ nie jest wyprowadzana ze zbioru $\{\mathrm{T}(p_k)\} \cup \mathrm{X_D}$. Schemat definicyjny (**D**) wyznacza zatem niekonstruktywne pojęcie prawdy. Absolutne pojęcie prawdy jest więc niekonstruktywne.

Jednak, jak się okaże, absolutne pojęcie prawdy wyznaczone przez równoważność definicyjną (**D**) ma podstawowe własności przypisywane intuicyjnie pojęciu prawdy.

(II. 7) Przede wszystkim można bowiem pokazać, że równoważność definicyjna (**D**) jest poprawna merytorycznie ze względu na schemat (**T**). Jest to konsekwencją faktu, że każda formuła postaci $(\forall P)([p]P \rightarrow ((\exists Q)([p]Q \mathbin{\&} Q) \equiv P))$ jest twierdzeniem logiki M.

(II. 8) Ponadto schemat definicyjny (**D**) jest na gruncie logiki M (w języku $\mathrm{For_T}$) inferencyjnie równoważny schematowi (**T**). Ponieważ każda formuła postaci $(\mathrm{T}(p_i) \equiv (\exists P)([p_i]P \mathbin{\&} P)) \equiv (\forall P)([p_i]P \rightarrow (\mathrm{T}(p_i) \equiv P))$ jest twierdzeniem logiki M (w języku $\mathrm{For_T}$), $C_1(\mathrm{X_T}) = C_1(\mathrm{X_D})$. Dlatego zbiory $\mathrm{X_T}$ i $\mathrm{X_D}$ są inferencyjnie równoważne na gruncie logiki M.

Dlatego schemat (**T**) nie tylko gwarantuje poprawność merytoryczną pojęcia prawdy wyznaczonego przez schemat definicyjny (**D**), lecz także wyczerpuje całą treść tego pojęcia.

(II. 9) Pojęciem nieodłącznie związanym z pojęciem prawdy jest oczywiście pojęcie fałszu. To, że dowolnie ustalona wypowiedź *p* jest fałszywa, będziemy zapisywać za pomocą skrótu $\mathrm{F}(p)$. Język $\mathrm{For_T}$ można więc bardziej wzbogacać, rozszerzając dalej zbiór stałych zdaniowych o przeliczalnie wiele napisów $\mathrm{F}(p_0)$, $\mathrm{F}(p_1)$, $\mathrm{F}(p_2)$,… , a dla dowolnej liczby naturalnej *i* napis $\mathrm{F}(p_i)$ czytać: *wypowiedź p_i jest fałszywa*. Tak otrzymany język będziemy z kolei oznaczać symbolem $\mathrm{For_{TF}}$. Dla dowolnej liczby naturalnej *i*, przez $\mathrm{F}(p_i)$ oznaczać będziemy *i*-ty wyraz ciągu $\mathrm{F}(p_0)$, $\mathrm{F}(p_1)$, $\mathrm{F}(p_2)$, … .

Przez analogię do pojęcia prawdy można powiedzieć, że wypowiedź fałszywa to taka wypowiedź, która wyraża pewną treść propozycjonalną, która nie zachodzi. Wypowiedź *p* jest więc fałszywa, gdy istnieje treść propozycjonalna *P*, taka że *p* głosi, że *P*., a przy tym nieprawda, że *P*.

Przyjmijmy więc następującą równoważność definicyjną:

(**D***) $\mathrm{F}(p_i) \equiv^{\mathrm{df}} (\exists P)([p_i]P \mathbin{\&} {\sim}P)$.

Powiemy, że równoważność ta wyznacza absolutne pojęcie fałszu.

Niech $\mathrm{X_{D*}}$ oznacza zbiór zawierający, jako swe elementy, jedynie wszystkie formuły podpadające pod schemat (**D***).

(II. 10) Fałsz w sensie definicji (**D***) jest na gruncie logiki M inferencyjnie równoważny brakowi prawdy w sensie definicji (**D**). Na gruncie logiki M (w języku

$\mathrm{For}_{\mathrm{TF}}$) oraz schematów definicyjnych (**D**) i (**D***) dla każdej liczby naturalnej i, formuła $\mathrm{F}(p_i)$ jest bowiem równoważna z formułą $\sim\mathrm{T}(p_i)$. Można bowiem udowodnić, że każda formuła postaci $(\exists P)([p]P \;\&\; \sim P)) \equiv \sim(\exists P)([p]P \;\&\; P)$ jest twierdzeniem logiki M. Dlatego dla dowolnej liczby naturalnej i, zbiór $\mathrm{Cn}(\mathrm{X}_\mathrm{D}, \mathrm{X}_{\mathrm{D}*})$ zawiera formułę $\sim\mathrm{T}(p_i) \equiv \mathrm{F}(p_i)$.

(II. 11) Tematem, który od samego początku ściśle wiązał się z problematyką logicznej analizy pojęcia prawdy, jest oczywiście paradoks kłamcy.

Wypowiedź p, taką że $[p](\exists P)([p]P \;\&\; \sim P)$, czyli taką, która powiada, że sama jest fałszywa w sensie schematu definicyjnego (**D***), nazwiemy *słabą wypowiedzią kłamcy*. Wypowiedź p, taką że $[p]\sim(\exists P)([p]P \;\&\; P)$, czyli taką, która powiada, że sama nie jest prawdziwa w sensie schematu definicyjnego (**D**), nazwiemy *silną wypowiedzią kłamcy*.

(II. 12) Nie istnieje ani taka wypowiedź p, że $[p](\exists P)([p]P \;\&\; \sim P)$, ani taka, że $[p]\sim(\exists P)([p]P \;\&\; P)$. Nie istnieje więc ani słaba ani silna wypowiedź kłamcy. Można bowiem udowodnić, że każda formuła postaci $\sim[p](\exists P)([p]P \;\&\; \sim P)$ i każda formuła postaci $\sim[p]\sim(\exists P)([p]P \;\& P)$ jest twierdzeniem logiki M.

Ustalenia te wydają się zgodne z przeświadczeniem, że pod groźbą sprzeczności, żadna wypowiedź nie może stwierdzać ani jedynie tego, że sama jest fałszywa, ani jedynie tego, że sama nie jest prawdziwa.

III.

(III. 1) Powiada się niekiedy, że pojęcia prawdy i fałszu wypowiedzi zawsze odsyłają jedynie do skończenie wielu treści propozycjonalnych. Każda treść propozycjonalna musi być bowiem zawsze wyznaczona i wyodrębniona przez pewne zdanie sensowne, czyli takie, które ktoś kiedyś wypowiedział, napisał czy pomyślał lub też usłyszał, odczytał i zrozumiał jako zdanie sensowne. Dlatego prawdziwość wypowiedzi odsyłać może jedynie do skończenie wielu treści propozycjonalnych wyodrębnionych i reprezentowanych przez skończenie wiele zdań sensownych.

Zatem w definicji, w myśl której wypowiedź jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy wypowiedź ta *głosi, że P* oraz P, lub jest fałszywa wtedy i tylko wtedy, gdy wypowiedź ta *głosi, że P* oraz $\sim P$, chodzi zawsze o jedną spośród skończenie wielu ustalonych i wyodrębnionych za pośrednictwem języka treści propozycjonalnych.

Dlatego zamiast wyrażenia kwantyfikującego '*istnieje taka treść propozycjonalna P, że*' należy użyć wyrażenia '*przynajmniej jedna spośród skończenie wielu ustalonych i wyodrębnionych za pomocą zdań treści propozycjonalnych jest taka, że*'. Mając do dyspozycji tylko skończenie wiele treści propozycjonalnych, zawsze możemy ustawić je w skończony n-wyrazowy ciąg. I zamiast '*przynajmniej jedna spośród skończenie wielu ustalonych treści propozycjonalnych jest taka, że*' możemy powiedzieć '*pierwsza z wyodrębnionych treści propozycjonalnych jest taka, że… lub druga z wyodrębnionych treści propozycjonalnych jest taka, że… lub…lub n-ta z wyodrębnionych treści propozycjonalnych jest taka, że…*'.

Treści propozycjonalne wyodrębnione za pomocą zdań reprezentowane są przez stałe zdaniowe języka logiki M.

Dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej n, niech C^n będzie teraz ustalonym skończonym n-wyrazowym ciągiem stałych zdaniowych. Dla dowolnego m, takiego, że $1 \leq m \leq n$, przez $\mathbf{P}_{Cm}$ oznaczać będziemy m -ty wyraz ciągu C^n.

Dla dowolnie ustalonego ciągu C^n rozważmy teraz następujący schemat definicyjny:

$(\mathbf{D}_{Cn})$ $\mathrm{T}(p_k) \equiv^{\mathrm{df}} ([p_k]\mathbf{P}_{C1} \,\&\, \mathbf{P}_{C1}) \vee ([p_k]\mathbf{P}_{C2} \,\&\, \mathbf{P}_{C2}) \vee\ldots\vee ([p_k]\mathbf{P}_{Cn} \,\&\, \mathbf{P}_{Cn})$.

Powiemy, że każdy taki schemat wyznacza *cząstkowe pojęcie prawdy*. Mamy teraz bowiem już nie jeden schemat wyznaczający jedno pojęcie prawdy, lecz wiele schematów wyznaczających wiele cząstkowych pojęć prawdy.

Niech $\mathrm{X}_{\mathrm{DCn}}$ oznacza zbiór zawierający, jako swe elementy, jedynie wszystkie formuły podpadające pod schemat $(\mathbf{D}_{Cn})$.

(III. 2) Dla dowolnej formuły postaci $\mathrm{T}(p_k)$, zbiór $\{\mathrm{T}(p_k)\} \cup \mathrm{X}_{\mathrm{DCn}} \cup \mathrm{X}_k$ jest sprzeczny. Dla dowolnej liczby naturalnej k, zbiór $\{([p_k]\mathbf{P}_{C1} \,\&\, \mathbf{P}_{C1}) \vee ([p_k]\mathbf{P}_{C2} \,\&\, \mathbf{P}_{C2}) \vee\ldots\vee ([p_k]\mathbf{P}_{Cn} \,\&\, \mathbf{P}_{Cn})\} \cup \mathrm{X}_k$ jest bowiem także sprzeczny. Dlatego schemat definicyjny $(\mathbf{D}_{Cn})$ wyznacza konstruktywne pojęcie prawdy. Cząstkowe pojęcia prawdy są zatem konstruktywnymi pojęciami prawdy.

Okaże się jednak, że cząstkowe pojęcia prawdy wyznaczone przez równoważności definicyjne $(\mathbf{D}_{Cn})$ nie mają wielu podstawowych własności przypisywanych intuicyjnie pojęciu prawdy.

(III. 3) Posługując się funkcją V można bowiem pokazać, że żadna formuła postaci $(\forall P)([p]P \rightarrow ((([p]\mathbf{P}_{C1} \,\&\, \mathbf{P}_{C1}) \vee ([p]\mathbf{P}_{C2} \,\&\, \mathbf{P}_{C2}) \vee\ldots\vee ([p]\mathbf{P}_{Cn} \,\&\, \mathbf{P}_{Cn})) \equiv P))$ nie jest twierdzeniem logiki M. Formuła postaci $V((\forall P)([p]P \rightarrow (([p]\mathbf{P}_{C1} \,\&\, \mathbf{P}_{C1}) \vee ([p]\mathbf{P}_{C2} \,\&\, \mathbf{P}_{C2}) \vee\ldots\vee ([p]\mathbf{P}_{Cn} \,\&\, \mathbf{P}_{Cn})) \equiv P)))$ nie jest bowiem tautologią klasycznego rachunku zdań. Dlatego równoważność definicyjna $(\mathbf{D}_{Cn})$ nie jest poprawna merytorycznie ze względu na schemat (**T**).

(III. 4) Dla ustalonego ciągu C^n rozważmy jednak następujący wariant schematu (**T**):

$(\mathbf{T}_{Cn})$ $(\forall P)(([p_i]\mathbf{P}_{C1} \vee [p_i]\mathbf{P}_{C2} \vee\ldots\vee [p_i]\mathbf{P}_{Cn}) \,\&\, [p_i]P \rightarrow (\mathrm{T}(p_i) \equiv P))$.

Przyjmijmy, że schematy takie określają warunki poprawności merytorycznej dla formuł definiujących cząstkowe pojęcia prawdy. Mamy już jednak nie jeden, lecz wiele schematów określających warunki poprawności merytorycznej dla formuł definiujących pojęcia prawdy.

Niech $\mathrm{X}_{\mathrm{TCn}}$ oznacza zbiór zawierający, jako swe elementy, jedynie wszystkie formuły podpadające pod ustalony schemat $(\mathbf{T}_{Cn})$.

(III. 5) Jeśli jakakolwiek formuła A języka $\mathrm{For}_{\mathrm{T}}$ jest elementem zbioru $\mathrm{C}_1(\mathrm{X}_{\mathrm{T}Cn})$, to formuła $V_T(A)$ jest tautologią klasycznego rachunku zdań. Zbiór $\mathrm{C}_1(\mathrm{X}_{\mathrm{TCn}})$ jest zatem niesprzeczny. Przyjęcie schematów ($\mathbf{T}_{Cn}$) jest więc także dopuszczalne na gruncie logiki M.

(III. 6) Można także udowodnić, że każda formuła postaci $(\forall P)((([p]\mathbf{P}_{C1} \vee [p]\mathbf{P}_{C2} \vee\ldots\vee [p]\mathbf{P}_{Cn}\ ) \,\&\, [p]P \rightarrow ((([p]\mathbf{P}_{C1} \,\&\, \mathbf{P}_{C1}) \vee ([p]\mathbf{P}_{C2} \,\&\, \mathbf{P}_{C2}) \vee\ldots\vee ([p]\mathbf{P}_{Cn} \,\&\, \mathbf{P}_{Cn})) \equiv P))$ jest twierdzeniem. Dlatego dla dowolnie ustalonego ciągu C^n, równoważność definicyjna ($\mathbf{D}_{Cn}$) jest poprawna merytorycznie ze względu na schemat ($\mathbf{T}_{Cn}$).

(III. 7) Z drugiej strony można jednak udowodnić, że każda formuła postaci $(\mathrm{T}(p) \equiv (([p]\mathbf{P}_{C1} \,\&\, \mathbf{P}_{C1}) \vee ([p]\mathbf{P}_{C2} \,\&\, \mathbf{P}_{C2}) \vee\ldots\vee ([p]\mathbf{P}_{Cn} \,\&\, \mathbf{P}_{Cn}))) \rightarrow (\forall P)((([p]\mathbf{P}_{C1} \vee [p]\mathbf{P}_{C2} \vee\ldots\vee [p]\mathbf{P}_{Cn}) \,\&\, [p]P\ ) \rightarrow (\mathrm{T}(p) \equiv P))$ jest twierdzeniem. A posługując się funkcją V_{T} można pokazać, że żadna formuła postaci $(\forall P)((([p]\mathbf{P}_{C1} \vee [p]\mathbf{P}_{C2} \vee\ldots\vee [p]\mathbf{P}_{Cn}) \,\&\, [p]P\ ) \rightarrow (\mathrm{T}(p) \equiv P)) \rightarrow (\mathrm{T}(p) \equiv (([p]\mathbf{P}_{C1} \,\&\, \mathbf{P}_{C1}) \vee ([p]\mathbf{P}_{C2} \,\&\, \mathbf{P}_{C2}) \vee\ldots\vee ([p]\mathbf{P}_{Cn} \,\&\, \mathbf{P}_{Cn})))$ nie jest twierdzeniem, albowiem formuła $V_{\mathrm{T}}((\forall P)((([p]\mathbf{P}_{C1} \vee [p]\mathbf{P}_{C2} \vee\ldots\vee [p]\mathbf{P}_{Cn}) \,\&\, [p]P\ ) \rightarrow (\mathrm{T}(p) \equiv P)) \rightarrow (\mathrm{T}(p) \equiv (([p]\mathbf{P}_{C1} \,\&\, \mathbf{P}_{C1}) \vee ([p]\mathbf{P}_{C2} \,\&\, \mathbf{P}_{C2}) \vee\ldots\vee ([p]\mathbf{P}_{Cn} \,\&\, \mathbf{P}_{Cn}))))$ nie jest tautologią klasycznego rachunku zdań. Dlatego $C_1(\mathrm{X}_{\mathrm{TCn}}) \subset C_1(\mathrm{X}_{\mathrm{DCn}})$, czyli zbiór $\mathrm{X}_{\mathrm{DCn}}$ jest silniejszy inferencyjnie od zbioru $\mathrm{X}_{\mathrm{TCn}}$ na gruncie logiki M. Na gruncie logiki M schemat definicyjny ($\mathbf{D}_{Cn}$) jest więc silniejszy inferencyjnie od schematu ($\mathbf{T}_{Cn}$).

Schemat określający warunek poprawności merytorycznej dla ustalonego cząstkowego pojęcia prawdy nie wyczerpuje więc całej treści tego pojęcia.

(III. 8) Możemy oczywiście także definiować cząstkowe pojęcia fałszu.

Dla dowolnie ustalonego ciągu C^n rozważmy z kolei następujący schemat definicyjny:

($\mathbf{D*}_{Cn}$) $\mathrm{F}(p_i) \equiv^{\mathrm{df}} ([p_i]\mathbf{P}_{C1} \,\&\, {\sim}\mathbf{P}_{C1}) \vee ([p_i]\mathbf{P}_{C2} \,\&\, {\sim}\mathbf{P}_{C2}) \vee\ldots\vee ([p_i]\mathbf{P}_{Cn} \,\&\, {\sim}\mathbf{P}_{Cn})$.

Powiemy, że każdy taki schemat wyznacza *cząstkowe pojęcie fałszu*.

Dla ustalonego ciągu C^n, niech $\mathrm{X}_{\mathrm{D*Cn}}$ oznacza zbiór zawierający, jako swe elementy, jedynie wszystkie formuły podpadające pod schemat ($\mathbf{D*}_{Cn}$).

Zobaczmy teraz, jakie związki logiczne zachodzą pomiędzy cząstkowymi pojęciami prawdy i fałszu wyznaczonymi przez ten sam ustalony ciąg stałych C^n.

(III. 9) Ponieważ można udowodnić, że każda formuła postaci $(([p]\mathbf{P}_{C1} \,\&\, {\sim}\mathbf{P}_{C1}) \vee\ldots\vee ([p]\mathbf{P}_{Cn} \,\&\, {\sim}\mathbf{P}_{Cn})) \rightarrow {\sim}(([p]\mathbf{P}_{C1} \,\&\, \mathbf{P}_{C1}) \vee\ldots\vee ([p]\mathbf{P}_{Cn} \,\&\, \mathbf{P}_{Cn}))$ jest twierdzeniem, zbiór $\mathrm{C}_1(\mathrm{X}_{\mathrm{DCn}} \cup \mathrm{X}_{\mathrm{D*Cn}})$ zawiera, jako swe elementy, wszystkie formuły postaci $\mathrm{F}(p_i) \rightarrow {\sim}\mathrm{T}(p_i)$. Dlatego dla ustalonego ciągu C^n, fałsz w sensie schematu ($\mathbf{D*}_{Cn}$) pociąga za sobą brak prawdy w sensie schematu ($\mathbf{D}_{Cn}$).

(III. 10) Wykorzystując funkcję V można jednak pokazać, że żadna formuła postaci ${\sim}(([p]\mathbf{P}_{C1} \,\&\, \mathbf{P}_{C1}) \vee ([p]\mathbf{P}_{C2} \,\&\, \mathbf{P}_{C2}) \vee\ldots\vee ([p]\mathbf{P}_{Cn} \,\&\, \mathbf{P}_{Cn})) \equiv (([p]\mathbf{P}_{C1} \,\&\, {\sim}\mathbf{P}_{C1}) \vee$

$([p]\mathbf{P}_{C2}$ & $\sim\mathbf{P}_{C2}) \vee\ldots\vee ([p]\mathbf{P}_{Cn}$ & $\sim\mathbf{P}_{Cn}))$ nie jest twierdzeniem. Formuła $V(\sim(([p]\mathbf{P}_{C1}$ & $\mathbf{P}_{C1}) \vee ([p]\mathbf{P}_{C2}$ & $\mathbf{P}_{C2}) \vee\ldots\vee ([p]\mathbf{P}_{Cn}$ & $\mathbf{P}_{Cn})) \rightarrow (([p]\mathbf{P}_{C1}$ & $\sim\mathbf{P}_{C1}) \vee ([p]\mathbf{P}_{C2}$ & $\sim\mathbf{P}_{C2}) \vee\ldots\vee ([p]\mathbf{P}_{Cn}$ & $\sim\mathbf{P}_{Cn})))$ nie jest tautologią klasycznego rachunku zdań. Dlatego zbiór $C_1(X_{DCn} \cup X_{D*Cn})$ nie zawiera, jako swego elementu, żadnej formuły postaci $F(p_i) \rightarrow \sim T(p_i)$. Dla ustalonego ciągu C^n, brak prawdy w sensie schematu $(\mathbf{D}_{Cn})$ nie pociąga więc za sobą fałszu w sensie schematu $(\mathbf{D}^*_{Cn})$.

Fałsz nie jest już więc dokładnie tym samym, co brak prawdy.

(III. 11) Posługiwanie się definicjami wyznaczającymi cząstkowe pojęcia prawdy i fałszu prowadzi także do całkowicie odmiennych wniosków w kwestii antynomii kłamcy.

Niech p będzie wypowiedzią, która powiada jedynie to, że nie jest prawdziwa w sensie schematu $(\mathbf{D}_n)$. Wypowiedź p nazwiemy *silną cząstkową wypowiedzią kłamcy*. Na mocy schematu definicyjnego $(\mathbf{D}_n)$, p jest więc wypowiedzią taką, że

$$[p]\sim(([p]\mathbf{P}_{C1} \,\&\, \mathbf{P}_{C1}) \vee ([p]\mathbf{P}_{C2} \,\&\, \mathbf{P}_{C2}) \vee\ldots\vee ([p]\mathbf{P}_{Cn} \,\&\, \mathbf{P}_{Cn})).$$

Niech q będzie z kolei taką wypowiedzią, która powiada jedynie to, że jest fałszywa w sensie schematu definicyjnego $(\mathbf{D}^*_n)$. Wypowiedź q nazwiemy *słabą cząstkową wypowiedzią kłamcy*. Na mocy schematu definicyjnego $(\mathbf{D}^*_n)$, q jest więc wypowiedzią taką, że $[q](([q]\mathbf{P}_{C1}$ & $\sim\mathbf{P}_{C1})\vee ([q]\mathbf{P}_{C2}$ & $\sim\mathbf{P}_{C2}) \vee\ldots\vee ([q]\mathbf{P}_{Cn}$ & $\sim\mathbf{P}_{Cn}))$.

(III. 12) Wykorzystując funkcję V można bowiem pokazać, że ani formuła $\sim[p]\sim(([p]\mathbf{P}_{C1}$ & $\mathbf{P}_{C1}) \vee ([p]\mathbf{P}_{C2}$ & $\mathbf{P}_{C2}) \vee\ldots\vee ([p]\mathbf{P}_{Cn}$ & $\mathbf{P}_{Cn}))$, ani formuła $\sim[q](([q]\mathbf{P}_{C1}$ & $\sim\mathbf{P}_{C1}) \vee ([q]\mathbf{P}_{C2}$ & $\sim\mathbf{P}_{C2}) \vee\ldots\vee ([q]\mathbf{P}_{Cn}$ & $\sim\mathbf{P}_{Cn}))$ nie jest twierdzeniem. Ani formuła $V(\sim[p]\sim(([p]\mathbf{P}_{C1}$ & $\mathbf{P}_{C1}) \vee ([p]\mathbf{P}_{C2}$ & $\mathbf{P}_{C2}) \vee\ldots\vee ([p]\mathbf{P}_{Cn}$ & $\mathbf{P}_{Cn})))$, ani formuła $V(\sim[q](([q]\mathbf{P}_{C1}$ & $\sim\mathbf{P}_{C1}) \vee ([q]\mathbf{P}_{C2}$ & $\sim\mathbf{P}_{C2}) \vee\ldots\vee ([q]\mathbf{P}_{Cn}$ & $\sim\mathbf{P}_{Cn})))$ nie jest bowiem tautologią klasycznego rachunku zdań. Dlatego zarówno zbiór $M \cup \{[p]\sim(([p]\mathbf{P}_{C1}$ & $\mathbf{P}_{C1}) \vee ([p]\mathbf{P}_{C2}$ & $\mathbf{P}_{C2}) \vee\ldots\vee ([p]\mathbf{P}_{Cn}$ & $\mathbf{P}_{Cn}))\}$ — jak i zbiór $M \cup \{[q](([q]\mathbf{P}_{C1}$ & $\sim\mathbf{P}_{C1}) \vee ([q]\mathbf{P}_{C2}$ & $\sim\mathbf{P}_{C2}) \vee\ldots\vee ([q]\mathbf{P}_{Cn}$ & $\sim\mathbf{P}_{Cn}))\}$ — jest niesprzeczny. Posługując się *cząstkowym pojęciem prawdy* można dopuścić istnienie wypowiedzi, która stwierdza jedynie to, że sama nie jest prawdziwa, a posługując się *cząstkowym pojęciem fałszu* można dopuścić istnienie wypowiedzi, która stwierdza jedynie to, że sama jest fałszywa, nie popadając przy tym w sprzeczność.

(III. 13) Można jednak udowodnić, że każda formuła postaci $[p]\sim(([p]\mathbf{P}_{C1}$ & $\mathbf{P}_{C1}) \vee ([p]\mathbf{P}_{C2}$ & $\mathbf{P}_{C2}) \vee\ldots\vee ([p]\mathbf{P}_{Cn}$ & $\mathbf{P}_{Cn})) \rightarrow \sim(([p]\mathbf{P}_{C1}$ & $\mathbf{P}_{C1}) \vee ([p]\mathbf{P}_{C2}$ & $\mathbf{P}_{C2}) \vee \ldots \vee ([p]\mathbf{P}_{Cn}$ & $\mathbf{P}_{Cn}))$ jest twierdzeniem. Dlatego dla dowolnie ustalonego schematu definicyjnego $(\mathbf{D}_n)$, zbiór $C_1(X_{Dn})$ zawiera, jako swe elementy, wszystkie formuły postaci $[p_k]\sim T(p_k) \rightarrow \sim T(p_k)$. Zgodnie z dowolnie ustalonym schematem definicyjnym $(\mathbf{D}_n)$, musimy zatem uznać zdanie wyrażające treść propozycjonalną silnej cząstkowej wypowiedzi kłamcy. Ale tym samym musimy także przyznać, że sama silna cząstkowa wypowiedź kłamcy nie jest prawdziwa w myśl schematu definicyjnego charakteryzującego cząstkowe pojęcie prawdy.

(III. 14) Ponadto, można udowodnić, że każda formuła postaci $[p](([p]\mathbf{P}_{C1}$ & $\sim\mathbf{P}_{C1}) \vee ([p]\mathbf{P}_{C2}$ & $\sim\mathbf{P}_{C2}) \vee\ldots\vee ([p]\mathbf{P}_{Cn}$ & $\sim\mathbf{P}_{Cn})) \rightarrow \sim(([p]\mathbf{P}_{C1}$ & $\sim\mathbf{P}_{C1}) \vee ([p]\mathbf{P}_{C2}$ & $\sim\mathbf{P}_{C2}) \vee \ldots \vee ([p]\mathbf{P}_{Cn}$ & $\sim\mathbf{P}_{Cn}))$ jest twierdzeniem. Dlatego dla dowolnie ustalonego schematu definicyjnego $(\mathbf{D*}_n)$, zbiór $C_1(X_{D*n})$ zawiera, jako swe elementy, wszystkie formuły postaci $[p_k]F(p_k) \rightarrow \sim F(p_k)$. Zgodnie z dowolnie ustalonym schematem definicyjnym $(\mathbf{D*}_n)$, musimy zatem odrzucić zdanie wyrażające treść propozycjonalną słabej cząstkowej wypowiedzi kłamcy. Ale tym samym musimy przyznać, że sama słaba cząstkowa wypowiedź kłamcy nie jest fałszywa w myśl schematu definicyjnego charakteryzującego cząstkowe pojęcie fałszu.

(III. 15) W obu powyższych przypadkach mamy więc pewną niezgodność pomiędzy ustaleniami dotyczącymi prawdy lub fałszu wypowiedzi a uznaniem bądź odrzuceniem zdania, które reprezentuje jej treść.

(III. 16) Można jednak udowodnić, że każda formuła postaci $[p](([p]\mathbf{P}_{C1}$ & $\sim\mathbf{P}_{C1}) \vee ([p]\mathbf{P}_{C2}$ & $\sim\mathbf{P}_{C2}) \vee\ldots\vee ([p]\mathbf{P}_{Cn}$ & $\sim\mathbf{P}_{Cn})) \rightarrow \sim ([p]\mathbf{P}_{C1} \vee [p]\mathbf{P}_{C2} \vee\ldots\vee [p]\mathbf{P}_{Cn})$ jest twierdzeniem oraz każda formuła postaci $[p] \sim(([p]\mathbf{P}_{C1}$ & $\mathbf{P}_{C1}) \vee ([p]\mathbf{P}_{C2}$ & $\mathbf{P}_{C2}) \vee\ldots\vee ([p]\mathbf{P}_{Cn}$ & $\mathbf{P}_{Cn})) \rightarrow \sim([p]\mathbf{P}_{C1} \vee [p]\mathbf{P}_{C2} \vee\ldots\vee [p]\mathbf{P}_{Cn})$ jest twierdzeniem.

Treść propozycjonalna zarówno silnej, jak i słabej cząstkowej wypowiedzi kłamcy, nie jest zatem wyodrębniona przez żadną ze stałych zdaniowych odpowiedniego ciągu C^n.

IV. (DODATEK)

(IV. 1) Na koniec naszkicujemy semantyczną charakterystykę logiki M. Wykorzystamy przy tym pewną wersję semantyki światów możliwych, a treści propozycjonalne reprezentować będziemy jako zbiory światów możliwych.

(IV. 2) Niech W będzie dowolnie ustalonym, niepustym zbiorem. Elementy zbioru W nazywać będziemy możliwymi okolicznościami lub światami możliwymi, i oznaczać literami v, w, itd. Niech PR będzie ustalonym, niepustym podzbiorem zbioru potęgowego $P(W)$. Elementy zbioru PR traktować będziemy jako odpowiedniki treści propozycjonalnych. Niech $\{F_1, F_2, F_3, \ldots\}$ będzie ustalonym ciągiem funkcji odwzorowujących zbiór W w zbiór $P(PR)$. Każda taka funkcja jest odpowiednikiem wypowiedzi, dla dowolnie ustalonych okoliczności wyznacza bowiem ustalony zbiór treści propozycjonalnych. Powiemy zatem, że $F_i(w)$ to zbiór treści propozycjonalnych wypowiedzi F_i w okolicznościach w.

Dla dowolnego i, funkcja F_i spełnia następujące dwa warunki:

(W_1) $F_i(w) \neq \varnothing$

(W_2) $w \in \cap F_i(w)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $w \in \cup F_i(w)$.

Warunek (W_1) to semantyczny odpowiednik pierwszego ustalenia wstępnego. Powiada, że w każdych okolicznościach dowolnie ustalona wypowiedź wyznacza pewien niepusty zbiór treści propozycjonalnych, choć elementem takiego zbioru może być zbiór pusty będący odpowiednikiem treści niemożliwej.

Warunek (W_2) to z kolei semantyczny odpowiednik trzeciego ustalenia wstępnego. Różne treści propozycjonalne wyznaczone w określonych okolicznościach przez jedną i tę samą wypowiedź nie muszą być zatem równoważne logicznie. Muszą być one jednak równoważne względem okoliczności, w których zostały one przez tę wypowiedź wyznaczone. W okolicznościach tych mogą być one tylko albo zarazem uznane, albo zarazem odrzucone.

Uporządkowaną trójkę $S = \langle W, PR, \{F_1, F_2, F_3, \ldots\}\rangle$ nazywamy strukturą modelową.

(IV. 3) Dla ustalonej struktury modelowej S, niech I_S będzie ustaloną funkcją odwzorowującą zbiór formuł zbudowanych poprawnie w zbiór PR spełniającą następujące warunki:

(1) $I_S(\sim A) = W — I_S(A)$;

(2) $I_S(A \& B) = I_S(A) \cap I_S(B)$;

(3) $I_S(A \rightarrow B) = — I_S(A) \cup I_S(B)$;

(4) $I_S(\exists P_i)(A\{P_i\})) = \cup I^*(A\{\mathbf{P}_j/P_i\})$ gdzie $\mathbf{P}_j$ jest dowolnie ustaloną stałą, która nie występuje w $\exists P_i(A\{P_i\})$, dla wszelkich funkcji I^* odwzorowujących zbiór formuł poprawnie zbudowanych w zbiór PR taki, że jeśli $j \neq k$, to $I^*(\mathbf{P}_k) = I_S(\mathbf{P}_k)$;

(5) $I_S([p_i]A) = \{w \in W : I_S(A) \in F_i(w)\}$.

Funkcję I_S nazywamy funkcją interpretacji odpowiadającą strukturze modelowej S. Parę uporządkowaną $\langle S , I_S \rangle$ nazywamy natomiast modelem.

(IV. 4) Można pokazać, że dla pewnych struktur modelowych (np. takich, że $PR = \mathrm{P}(W)$) istnieją odpowiadające im funkcje interpretacji. Istnieją zatem modele. Z drugiej jednak strony nie dla każdej struktury modelowej istnieją odpowiadające jej funkcje interpretacji.

(IV. 5) Napis $w \models_{<S,\, I_S>} A$ oznacza, że formuła A jest prawdziwa w świecie możliwym w w modelu $\langle S, I_S \rangle$. Powiemy, że $w \models_{<S,\, I_S>} A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $w \in I_S(A)$. W szczególności zauważmy, że $w \models_{<S,\, I_S>} [p_i]\, A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $I_S(A) \in F_i(w)$. Warunek prawdziwości dla formuł postaci $[p_i]\, A$ powiada zatem, że w dowolnie ustalonych okolicznościach w, wypowiedź p_i *głosi, że A*, wtedy i tylko wtedy, gdy treść propozycjonalna formuły A należy do zbioru treści propozycjonalnych wyznaczonych przez wypowiedź p_i w okolicznościach w.

Powiemy, że formuła A obowiązuje w modelu $<S, I_S>$ wtedy i tylko wtedy, gdy $I_S(A) = W$, to znaczy, gdy dla każdego $w \in W$, $w \models_{<S, I_S>} A$. Powiemy także, że formuła A jest tautologią, gdy obowiązuje w każdym modelu.

(IV. 6) Można teraz udowodnić, że każde twierdzenie logiki M jest tautologią. W tym celu należy udowodnić, że wszystkie aksjomaty, to znaczy wszystkie formuły o budowie określonej przez schematy (A0) — (A3), są tautologiami, a ponadto że każda z reguł inferencyjnych, czyli każda spośród reguł (R0) — (R2), zachowuje własność bycia tautologią.

(IV. 7) Można także pokazać, że każda formuła, która jest tautologią, jest także twierdzeniem logiki M. Aby to pokazać, wystarczy skonstruować taki model, w którym nie obowiązuje żadna formuła niebędąca twierdzeniem logiki M.

(IV. 8) Niesprzeczny zbiór formuł X nazywamy maksymalnie niesprzecznym, gdy dla dowolnej formuły A albo A należy do X, albo $\sim A$ należy do X. Jeśli X jest maksymalnie niesprzecznym zbiorem formuł, to każda formuła wyprowadzalna ze zbioru X należy do zbioru X. Zbiór formuł X nazywamy konstruktywnym ze względu na ciąg wszystkich stałych zdaniowych (lub krótko, konstruktywnym), gdy dla dowolnego n, jeśli formuła postaci $(\exists P_n)(A\{P_n\})$ należy do X, to dla pewnego k formuła postaci $A\{\mathbf{P}_k/P_n\}$ także należy do X.

Jeśli X jest maksymalnie niesprzecznym konstruktywnym zbiorem formuł, to dla dowolnie ustalonych formuł A, B i $(\exists P)(A\{P\})$:

$\sim A \in$ X wtedy i tylko wtedy, gdy nieprawda, że $A \in$ X,

$A \,\&\, B \in$ X wtedy i tylko wtedy, gdy $A \in$ X oraz $B \in$ X,

$A \rightarrow B \in$ X wtedy i tylko wtedy, gdy jeśli $A \in$ X, to $B \in$ X,

$(\exists P)(A\{P\}) \in$ X wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnej formuły C, $A\{C/P\} \in$ X.

Można pokazać, że istnieją maksymalnie niesprzeczne konstruktywne zbiory formuł oraz że każda formuła jest twierdzeniem logiki M wtedy i tylko wtedy, gdy należy do wszystkich maksymalnie niesprzecznych konstruktywnych zbiorów formuł.

Niech W_{M} będzie zbiorem wszystkich maksymalnie niesprzecznych konstruktywnych nadzbiorów M. Przez W^B oznaczmy zbiór $\{v \in W_{\mathrm{M}} : B \in v\}$.

Niech $PR_{\mathrm{M}} =^{\mathrm{df}} \{\mathrm{X}$: dla pewnego B, $\mathrm{X} = W^B\}$.

Dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej k, niech $F_{\mathrm{M}k}$ będzie funkcją odwzorowującą zbiór $\mathrm{W_M}$ w zbiór $\mathrm{P}(PR_{\mathrm{M}})$ taką, że $F_{\mathrm{M}k}(w) = \{\mathrm{X}$: dla pewnego B takiego, że $[p_k]B \in w$, $\mathrm{X} = W^B\}$. Strukturę $S_{\mathrm{M}} = <W_{\mathrm{M}}, PR_{\mathrm{M}}, \{F_{\mathrm{M}1}, F_{\mathrm{M}2}, F_{\mathrm{M}3}, \ldots\}>$ nazywamy kanoniczną strukturą modelową.

Można pokazać, że kanoniczna struktura modelowa spełnia warunki W_1 i W_2.

(IV. 9) Niech I_{M} będzie teraz funkcją odwzorowującą zbiór formuł poprawnie zbudowanych w zbiór PR_{M} taką, że $I_{\mathrm{M}}(A) =^{\mathrm{df}} W^A$.

Ponieważ można udowodnić, że

(1) $W^{\sim A} = — W^{A}$,
(2) $W^{A\&B} = W^{A} \cap W^{B}$,
(3) $W^{(\exists P\mathrm{n})(A\{P\mathrm{n}\})} = \cup W^{A\{B/P\mathrm{n}\}}$, dla pewnego B,
(4) $W^{[pi]A} = \{w \in W : W^{A} \in F_{\mathrm{M}i}(w)\}$,

funkcja I_{M} jest funkcją interpretacji odpowiadającą strukturze modelowej S_{M}. Dlatego para $<S_{\mathrm{M}}, I_{\mathrm{M}}>$ jest modelem. Model ten nazwiemy modelem kanonicznym.

(IV. 10) Zauważmy teraz, że dla dowolnego w należącego do W_{M}, $w \models_{<S\mathrm{M},\, I\mathrm{M}>} A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \in w$. Dlatego dla każdej formuły A, która nie jest twierdzeniem logiki M, istnieje takie w należące do W_{M}, że $\sim A \in w$, a więc także $A \notin w$ oraz, w konsekwencji, $w \not\models_{<S\mathrm{M},\, I\mathrm{M}>} A$. Żadna formuła niebędąca twierdzeniem logiki M nie obowiązuje więc w modelu kanonicznym. Dlatego żadna taka formuła nie jest tautologią.