Filozofia Nauki
Rok XII, 2004, Nr 2(46)

Krzysztof Wójtowicz

O najważniejszym argumencie na rzecz matematycznego realizmu[1]

Celem niniejszego artykułu jest prezentacja najszerzej — we współczesnej filozofii matematyki — dyskutowanego argumentu na rzecz matematycznego realizmu, czyli tzw. argumentu z niezbędności, pochodzącego od Quine'a. Argument ten przedstawiam w kontekście poglądów filozoficznych Quine'a; w szczególności jego koncepcji istnienia.[2]

1. STATUS REFLEKSJI FILOZOFICZNEJ NAD MATEMATYKĄ

Punktem wyjścia argumentacji Quine'a na rzecz realizmu matematycznego jest fakt, że matematyka odgrywa podstawową rolę w teoriach empirycznych. Mamy tu więc do czynienia z pewną obserwacją dotyczącą stanu i sposobu uprawiania nauki. Pojawia się więc pytanie o związki między argumentacją filozoficzną a analizami metanaukowymi.

Quine wypowiada się w tej kwestii jednoznacznie: przyjmuje metafilozoficzną tezę naturalizmu, w myśl której standardy argumentacji filozoficznej winny uwzględniać wyniki analiz naukowych (i metanaukowych), dotyczących naszej wiedzy — w szczególności wiedzy naukowej. Naturalizm, według Quine'a, opiera się przede wszystkim na przekonaniu, że rzeczywistość jest opisywana, identyfikowana i anali-

---

[1] Punktem wyjścia dla tego artykułu był referat „Spór o istnienie w matematyce", wygłoszony 29.11.2003 na IV Seminarium Lwowsko-Warszawskim. Referat ten oparty był na pierwszym rozdziale książki [Wójtowicz 2003].

[2] Czytelnik znajdzie obszerne omówienie innych wersji matematycznego realizmu, a także antyrealizmu w pracy [Wójtowicz 2003].

zowana „w nauce, a nie w jakiejś uprzedniej wobec niej filozofii pierwszej" [Quine 1981, 49]. Quine odrzuca więc postulat fundującego charakteru filozofii pierwszej. Filozofia nie ma charakteru uprzywilejowanego, to nie analizy filozoficzne są podstawowym źródłem naszej wiedzy — także wiedzy dotyczącej podstawowych zasad poznania. Nauka i filozofia tworzą jednolitą siatkę przekonań o świecie i granica między nimi nie jest wyraźnie określona. Quine akcentuje jedność wiedzy: potocznej, naukowej oraz filozoficznej. Filozofia nie jest niezależna od nauk szczegółowych i ich nie poprzedza, nie stanowi dla nich punktu wyjścia. Raczej korzysta z wyników nauk szczegółowych i — w teoretyczny sposób — włącza je do całościowego obrazu świata.

Akceptacja metafilozoficznego stanowiska naturalizmu ma istotne znaczenie dla rozumienia właściwego sposobu dyskusji problematyki metafizycznej. Pytania ontologiczne są stawiane w kontekście posiadanej przez nas (a opisanej w naukach szczegółowych) wiedzy o świecie i rozstrzygane w świetle tych wyników. Nie oznacza to, że odpowiedzi na pytanie np. o istnienie obiektów abstrakcyjnych dostarczy wprost fizyka czy biologia. Analizy metanaukowe mogą jednak pomóc w rozstrzygnięciu tych problemów. Dotyczy to w szczególności problemu istnienia obiektów matematycznych, dla którego kluczowa jest analiza roli matematyki w naukach empirycznych.

2. ODRZUCENIE DWÓCH DOGMATÓW EMPIRYZMU A HOLIZM

W formowaniu się argumentacji Quine'a na rzecz stanowiska realistycznego istotne znaczenie miało odrzucenie dwóch tez, które — w jednym z najgłośniejszych swoich tekstów [Quine 1953] — określa mianem „dwóch dogmatów empiryzmu". Quine formułuje je w następujący sposób:

(i) Istnieje fundamentalna dychotomia pomiędzy zdaniami analitycznymi (których prawdziwość wynika wprost z postulatów języka i jest niezależna od faktów) i syntetycznymi (których prawdziwość uzależniona jest od stanu faktycznego).

(ii) Każde sensowne zdanie jest równoważne pewnej konstrukcji logicznej złożonej z terminów, odnoszących się bezpośrednio do danych doświadczenia (jest to tzw. dogmat redukcjonizmu).

Quine analizuje różne sposoby zdefiniowania pojęcia analityczności i dochodzi do wniosku, że żaden z nich nie spełnia naszych oczekiwań. Przyznaje wprawdzie, że sama idea dokonania takiej klasyfikacji jest kusząca i naturalna, nie jest jednak możliwa do zrealizowania i tym samym tradycyjny, dychotomiczny podział nie ma racji bytu. Dogmat pierwszy należy więc odrzucić.

Odrzuca też pogląd, iż pojedyncze zdania mają dobrze określoną treść empiryczną, tzn. że dla każdego zdania **z osobna** istnieje metoda jego indywidualnej weryfikacji empirycznej. Zdaniom przypisujemy bowiem sens w kontekście pewnej teorii, a nie w izolacji. W szczególności modyfikacja sensu zdań odbywa się poprzez modyfikację całego systemu. Prowadzi to do holistycznej tezy, iż „nasze twierdzenia o świecie zewnętrznym stają przed trybunałem doświadczenia zmysłowego nie indywidualnie, lecz zbiorowo" [Quine 1953, 63]. Według Quine'a, jednostką sensu empirycznego jest cała teoria, włącznie z instrumentarium matematycznym i logicznym. W ten sposób odrzuca się drugi dogmat.

Na gruncie tego stanowiska nie da się wskazać zbioru danych zmysłowych odpowiedzialnych za rewizję poszczególnych zdań. Nasza wiedza nie jest tworzona „w kwantach" — teorie są bowiem weryfikowane jako pewne całości. Zdanie może nadal być uznawane za prawdziwe (mimo zmian warunków zewnętrznych, tj. mimo zmian danych doświadczalnych), o ile dokona się odpowiednich modyfikacji teorii (poprzez modyfikację przyjmowanych założeń, postulatów znaczeniowych czy nawet praw logiki).[3] Świadczy to — z drugiej strony — o tym, że nie można wskazać zdań odpornych na rewizję: nawet prawo wyłączonego środka może bowiem zostać usunięte z teorii (mogłoby się tak na przykład zdarzyć, gdyby konieczne to było dla uproszczenia mechaniki kwantowej). Wszystkie zdania teorii ulokowane są w pewnej całościowej siatce przekonań. Dotyczy to zarówno zdań obserwacyjnych, jak i zdań teoretycznych; a także — co jest ważne dla problemu istnienia obiektów matematycznych — zdań angażujących pojęcia matematyczne.[4]

Metaforę brzegu i wnętrza teorii Quine wyjaśnia, mówiąc, że chodzi o prawdopodobieństwo odrzucenia — w wypadku niezgodności z doświadczeniem — takiego, a nie innego zdania [Quine 1953, 66]. Teorię można bowiem uzgodnić z doświadczeniem na wiele sposobów. Klasa zdań, których status przy zmianie warunków brzegowych ulega zmianie, nie jest dobrze określona — zmianie podlega w gruncie rzeczy cała teoria i tylko w kontekście rewizji całej teorii można mówić o rewizji poszczególnych zdań. Ustalona klasa danych empirycznych *D* może być wyjaśniana teoretycznie na wiele sposobów, a stąd wynika, że teorie fizyczne różne pod względem logicznym mogą być empirycznie równoważne. Konieczne jest więc podjęcie dodatkowej decyzji, dotyczącej wyboru jednej z możliwych teorii.

W nauce mamy do czynienia z rozbudowywaniem ontologii, czyli postulowaniem istnienia nowych bytów, po to, aby teorię uprościć i uczynić ją bardziej zrozumiałą. (Na przykład założenia o istnieniu przedmiotów mikroświata czyni się po to, aby

---

[3] „Rozmaite zdania można niewątpliwie zastąpić ich negacjami, nie powodując konfliktu z żadnymi możliwymi zdarzeniami zmysłowymi, o ile podda się rewizji inne fragmenty nauki w sposób odpowiednio kompensujący" [Quine 1986a, 80].

[4] „Całokształt naszej tzw. wiedzy czy też przekonań, od najbardziej przypadkowych prawd geografii i historii aż po najgłębsze prawa fizyki atomistycznej, a nawet czystej matematyki i logiki formalnej, jest tworem człowieka i styka się z doświadczeniem tylko wzdłuż swoich krawędzi. Mówiąc inaczej, nauka jako całość podobna jest do pola siły, którego warunkami brzegowymi jest doświadczenie. Konflikt z doświadczeniem na brzegach pola powoduje odpowiednie przystosowania w jego wnętrzu. Niektórym ze zdań zostaje przypisana inna wartość logiczna [...] Żadne poszczególne świadectwo doświadczenia nie jest związanie z jakimś określonym zdaniem z wnętrza pola; związek ten ma co najwyżej charakter pośredni, za sprawą równowagi pola jako całości" [Quine 1953, 65].

uprościć i uczynić bardziej operatywnymi i zrozumiałymi prawa opisujące przedmioty makroskopowe.) Quine mówi o tym w następujący sposób: „Postulowanie jakiegokolwiek rodzaju ciał jest z naukowego punktu widzenia uprawnione tylko o tyle, o ile pomaga nam formułować prawa — prawa, których ostatecznymi świadectwami są dane zmysłowe z przeszłości, a których ostatecznym usprawiedliwieniem są przewidywania co do przyszłych danych zmysłowych. Postulowanie molekuł różni się od postulowania zwykłych ciał tylko stopniem komplikacji" [Quine 1986a, 75-6].

Przy konstruowaniu teorii naukowych mamy więc do czynienia z następującym problemem: jak na podstawie wyjściowych danych (tj. pewnego strumienia wrażeń zmysłowych) sformułować zgodną z tymi danymi teorię. Kiedy postulujemy w tej teorii istnienie pewnych przedmiotów jest to zabieg teoretyczny — i w tym sensie wszystkie przedmioty, o jakich mówi teoria, są przedmiotami teoretycznymi [Quine 1981, 48]. „Przedmioty fizyczne są pojęciowo wnoszone do sytuacji jako wygodne ogniwa pośredniczące — nie przez definiowanie ich w terminach doświadczenia, lecz jako nieredukowalne byty postulowane" [Quine 1953, 67]. Teoria naukowa jest więc po prostu pewnym mostem pojęciowym, który łączy pewne pobudzenia zmysłowe z innymi pobudzeniami zmysłowymi [Quine 1981, 48].

Zwrot „uzasadnienie istnienia obiektów typu *P*" znaczy to samo, co „uzasadnienie przyjęcia ontologii, w skład której wchodzą obiekty typu *P*". Przyjęcie takiej a nie innej ontologii jest uzależnione od akceptowanych przez nas kryteriów metodologicznych. „[M]nożenie bytów może stanowić istotny wkład do teorii. Nie zawsze stanowi taki wkład. Samo w sobie mnożenie bytów należy uznać za niepożądane, zgodnie z brzytwą Ockhama; musi się ono opłacać. Rozszerzaj uniwersum o klasy i inne dodatki, jeśli dostarczy ci to prostszej, gładszej i bardziej ogólnej teorii; w przeciwym wypadku nie czyń tego. Wszak chodzi o prostotę, a ekonomia ontologiczna jest jednym z jej aspektów, wymagającym uwzględnienia obok innych. Wolno jednak sądzić, że pewne rozszerzenia uniwersum przyczyniają się w sumie co uproszczenia naszego systemu świata" [Quine 1986a, 86]. Quine podkreśla więc element pragmatyczny, który stale obecny jest przy decyzjach dotyczących modyfikacji systemu — czyli zharmonizowania teorii naukowej z naszymi bodźcami zmysłowymi.

W [Quine 1969] Quine wskazuje na fakt, że pewne zdania wydają się być potwierdzane wprost przez doświadczenie, inne zaś wydają się być od tego doświadczenia odległe. Podaje tu przykład rozważań dotyczących zakrzywienia czasoprzestrzeni czy ciągłej kreacji wodoru w rozszerzającym się uniwersum. Niewątpliwie, tezy dotyczące tych faktów są zdecydowanie bardziej odległe od bezpośredniego doświadczenia, niż np. teza mówiąca, że ciało toczące się po równi pochyłej porusza się coraz szybciej. Niemniej jednak różnica ta wynika jedynie z naszego subiektywnego poczucia, na ile mocno dane zdanie jest osadzone w danej teorii. Różnią się one prawdopodobieństwem tego, że (przy pojawieniu się nowych danych) zostaną odrzucone, ale nie jest to różnica jakościowa. Dotyczy to także zdań wyrażających zobowiązania ontologiczne teorii, w szczególności zdań dotyczących istnienia obiektów matematycznych. Niewątpliwie, trudno przypisać tezie typu „istnieją przestrzenie

Hilberta" zbiór danych obserwacyjnych, które byłyby bezpośrednio odpowiedzialne za jej weryfikację. Jednak również to zdanie jest potwierdzane jako fragment pewnej całości.

Z rozważań tych wynika w szczególności, że kryteria postulowania istnienia przedmiotów wykraczają poza kryteria obserwowalności. Nie obserwujemy bezpośrednio elektronów ani pól grawitacyjnych. Uznajemy jednak, że pewne teoretyczne konstrukty, które występują w danej teorii naukowej mają swoje odpowiedniki w rzeczywistości pozajęzykowej. Uzasadnienie istnienia tych obiektów wynika z pewnych rozważań systematycznych, dotyczących ich roli w nauce. „Naukowcy i filozofowie poszukują całościowego systemu świata, i to systemu, który rzetelniej i pełniej nastawiony jest na referencję niż język potoczny" [Quine 1981, 38-39]. Identyfikacja ontologii, czyli tej klasy obiektów, do jakiej faktycznie odnoszą się nasze teorie naukowe, nie musi się pokrywać z naszym odczuciem, kryteria istnienia zaś nie pokrywają się z prostymi kryteriami zdroworozsądkowymi. Fakt ten ma istotne znaczenie dla dyskusji dotyczącej istnienia obiektów matematycznych.

Argumentacja Quine'a ma więc następującą strukturę: punktem wyjścia są dane empiryczne, które staramy się wyjaśnić tworząc odpowiednią teorię. Teoria ta konstruowana jest w taki sposób, aby czynić zadość pewnym (motywowanym pragmatycznie) standardom metodologicznym. To prowadzi nas do przyjęcia np. fizykalistycznej a nie fenomenalistycznej ontologii dla naszej zdroworozsądkowej teorii świata. Quine jednak, wyraźnie zaznacza, że pomimo iż mówimy o przedmiotach postulowanych w danej teorii, to nie odbiera im to bynajmniej statusu realności. „Wszystko to, czemu przypisujemy istnienie, jest przedmiotem postulowanym z punktu widzenia opisu procesu budowania teorii, a zarazem jest rzeczywiste z punktu widzenia samej tworzonej teorii. Nie powinniśmy [...] traktować punktu widzenia teorii jako gry pozorów, zawsze musimy bowiem przyjmować perspektywę tej czy innej teorii — najlepszej, na jaką w danej chwili potrafimy się powołać" [Quine 1960, 37]. Prowadzi to w szczególności do realistycznej a nie instrumentalistycznej interpretacji terminów teoretycznych. Dokładnie tak samo jest również w wypadku problemu istnienia obiektów matematycznych. Pytanie o obiekty matematyczne nie jest pytaniem innego typu, niż pytanie o istnienie obiektów teoretycznych (czy — ogólniej — o istnienie obiektów, o których mówi teoria). Wszystkie te pytania są bowiem szczególnym przypadkiem problemu identyfikacji ontologii dla teorii wyjaśniającej dane zmysłowe.

To holistyczne ujęcie prowadzi do tezy, że nie jest uzasadniony częściowy realizm — w myśl którego interpretację posiadałyby tylko niektóre terminy występujące w teorii empirycznej (a mianowicie terminy odnoszące się do obiektów fizycznych), natomiast inne terminy występujące w teorii empirycznej (terminy matematyczne) byłyby pozbawione interpretacji i pełniły jedynie czysto pomocniczą rolę (jako wygodny system notacyjny). Gdyby można było wyróżnić w klasie zdań naukowych klasę zdań analitycznych i zdań syntetycznych, to wówczas taki podział byłby możliwy. Uznanie analitycznych zdań egzystencjalnych za prawdziwe nie wiązałoby się wtedy z zaciąganiem żadnych zobowiązań ontologicznych. Quine jednak odrzuca możliwość przeprowadzenia takiego podziału. Skoro więc nie możemy wskazać w teoriach naukowych zdań, które uznamy za pozbawione ontologicznej treści, pomocnicze narzędzia notacyjne, to nie możemy też w naszych analizach ontologicznych ignorować zdań odnoszących się do przedmiotów abstrakcyjnych (a zatem także matematycznych). Upada bowiem argument, że są one prawdziwe jedynie na mocy postulatów znaczeniowych języka, zaś występujące w nich terminy są pozbawione pozajęzykowych odpowiedników. Wszystkie zdania teorii (w tym także zdania matematyczne) mają podobny status poznawczy, gdyż jednostką sensu empirycznego jest cała teoria. Pytania o istnienie obiektów fizycznych, teoretycznych i abstrakcyjnych są pytaniami tej samej klasy — wszystkie bowiem dotyczą pewnych obiektów, o których mowa w teorii. Prawdy matematyczne nie różnią się więc zasadniczo od prawd empirycznych, gdyż wszystkie one ulokowane są w naszej całościowej siatce przekonań.

Kluczowy staje się zatem problem określenia zobowiązań ontologicznych teorii naukowej, tzn. ustalenia, jakich bytów istnienie zakłada dana teoria.

3. KONCEPCJA I KRYTERIUM ISTNIENIA

Zdaniem Quine'a, problem istnienia winien być zawsze stawiany relatywnie do określonej teorii — i tylko w relatywizacji do określonej teorii ma on uchwytny sens. Jest to więc poniekąd problem techniczny, dotyczący opisu teorii naukowych. Pytanie „co tak naprawdę istnieje?" zostanie zastąpione pytaniem „co musimy uznać za istniejące, jeśli chcemy zaakceptować pewną teorię *T*?"

Konieczne jest zatem rozstrzygnięcie problemu, kiedy w myśl pewnej teorii *T* istnieje obiekt *O*. Problem nie jest banalny. Nie jest bowiem jasne, jakie przedmioty należy przypisać danej ontologii — czyli co należy traktować jako rzeczy zakładane w danej teorii [Quine 1986a, 132]. Quine wskazuje na fakt, że np. ontologia zdroworozsądkowej teorii świata nie jest dobrze określona:

„Ontologia zwykłego człowieka jest niejasna i nieporządna pod dwoma względami. Obejmuje ona wiele domniemanych przedmiotów, które są niejasno lub nieadekwatnie określone. Ale co ważniejsze, nie jest jasny jej zakres; nie sposób nawet ogólnie stwierdzić, które z tych niejasno określonych przedmiotów wolno w ogóle przypisać ontologii danego człowieka, co traktować jako rzeczy przez niego przyjmowane" [Quine 1981, 38].[5]

---

[5] Można podać szereg przykładów zdań, których ontologia *prima facie* nie jest jasna: „Osoby *A* i *B* mają tylko kilka cech wspólnych"; „Różnice między naszymi stanowiskami są obecnie mniejsze, niż przed dyskusją"; „Te dwa punkty widzenia są prawie identyczne"; „Poziom oczekiwań wykracza poza możliwości ich spełnienia"; „W istniejącym stanie rzeczy nie jest możliwe..." „W obie te sytuacje uwikłane są te same osoby"; „Ten zawodnik obdarzony jest ogromną energią", „Istnieje duży postęp w rekonwalescencji".

Problem sformułowania odpowiedniego kryterium istnienia, które umożliwi identyfikację ontologii danej teorii nie jest — w całej ogólności — problemem dobrze postawionym. Quine twierdzi, że problem ten nabiera sensu dopiero wówczas gdy dysponujemy czymś w rodzaju kwantyfikacji, gdyż to ona jest kryterium tego, kiedy dana teoria odnosi się do obiektów pewnego typu [Quine 1986a, 68]. Dopiero kwantyfikacja pokazuje, gdzie w danej teorii pojawia się przedmiot postulowany. Kwantyfikacja stanowi więc swoisty wskaźnik ontologii — aparat referencjalny takiego języka, pozwalający na odnoszenie się do przedmiotów staje się wyraźnie określony właśnie dzięki istnieniu takiego wskaźnika [Quine1986a, 132].

Kryterium istnienia można sformułować tylko dla języków o ściśle określonej notacji, którą Quine określa mianem notacji „ontologicznie zdeterminowanej" [Quine 1986a, 135]. Za kanoniczny uważa Quine język rachunku predykatów pierwszego rzędu. Dopiero w takim języku problem ontologii jest dobrze postawiony. „Przyjęcie dodatkowych elementów językowych może zniszczyć to ontologiczne kryterium. Załóżmy, na przykład, że ktoś przyjmuje *explicite* operator dla formowania domkniętych iteratów predykatów, zamiast definiować je na gruncie ontologii zbiorów. Czy wolno twierdzić, że ma bardziej oszczędną ontologię? Powiedziałbym raczej, że uchylił on problem ontologiczny przechodząc do języka, który nie ma wyraźnej ontologii. Jego ontologia jest nieokreślona, a co najwyżej relatywna do pewnego uzgodnionego przekładu tej notacji na naszą, standardową notację" [Quine 1986a, 134]. Wprowadzenie dodatkowej (obcej) notacji może dawać zubożony obraz ontologii; pewne elementy notacji mogą z kolei działać odwrotnie, sugerując istnienie przedmiotów, których faktycznie nie ma w zakresie zmienności zmiennych. To wiąże się oczywiście z przyjęciem referencjalnej, a nie substytucyjnej interpretacji kwantyfikatora. W myśl interpretacji substytucyjnej, zdanie „$\exists x\varphi(x)$" jest prawdziwe, jeśli jest w języku nazwa a taka, że zdanie $\varphi(a)$ jest prawdziwe (a jest podstawione w miejsce zmiennej, stąd nazwa „interpretacja substytucyjna"). W myśl interpretacji referencjalnej, zdanie to jest prawdziwe, jeśli w dziedzinie przedmiotowej, w której interpretowany jest język, jest obiekt o własności φ. Quine opowiada się za interpretacją referencjalną, w myśl której kwantyfikacja staje się wskaźnikiem istnienia.

Przyjęcie kwantyfikatorowego kryterium istnienia wiąże się z koncepcją istnienia przyjmowaną przez Quine'a. Quine nie rozróżnia sposobów istnienia — przedmioty różnić się mogą własnościami (np. jedne znajdują się w czasoprzestrzeni, inne nie, jedne są oddziałujące i obserwowalne, inne oddziałujące i nieobserwowalne), ale nie sposobem istnienia. Nie ma zatem sensu stwierdzenie, że obiekty matematyczne wprawdzie istnieją, ale w innym sensie, niż obiekty fizyczne, albo że jedne z nich istnieją, drugie zaś jedynie bytują. Quine nie dopuszcza bowiem także rozróżnienia pomiędzy „być" a „istnieć" [Quine 1969, 100]. Istnienie nie jest własnością, która przysługuje jedynie niektórym spośród bytujących obiektów (Quine w szczególności odrzuca koncepcję Meinonga — np. w [Quine 1969, 100]). Nie ma zatem sensu koncepcja, w myśl której o istnieniu niektórych spośród postulowanych w teorii bytów orzeka się za pomocą predykatu istnienia.

Kryterium istnienia Quine'a jest więc w pewnym sensie neutralne względem sporu realizm-nominalizm. Quine nie klasyfikuje obiektów w zależności od rodzajów (realne *versus* abstrakcyjne; czasoprzestrzennie zlokalizowane *versus* nielokalizowalne czasoprzestrzennie *etc.*), by następnie jedynie niektórym z nich przypisać własność istnienia. Przyjęcie tego kryterium nie wynika z wcześniejszych decyzji światopoglądowych, zgodnych np. ze stanowiskiem materialistycznym, nominalistycznym, spirytualistycznym, *etc.* Istnienie nie jest cechą przedmiotu zależną od innych własności tego przedmiotu. Kryterium istnienia przedmiotu nie opiera się na analizie cech, ale na fakcie, że o tym przedmiocie mówi pewne wyrażenie egzystencjalne. Swobodnie mówiąc, fakt że obiekty matematyczne mają inne własności niż znane nam z codziennego doświadczenia makroskopowe obiekty fizyczne nie stanowi żadnego powodu, aby odmawiać im istnienia. Istnienie obiektów matematycznych uzasadniane jest w oparciu o to samo kryterium, w oparciu o które uzasadniane jest istnienie innych obiektów, o których mowa w teoriach fizycznych. Z punktu widzenia dyskusji dotyczącej realizmu matematycznego jest to bardzo ważna cecha tego kryterium.

4. W JAKIM SENSIE ZDANIA MATEMATYCZNE SĄ PRAWDZIWE?

Matematyka stanowi zasadniczą, nieusuwalną część teorii fizycznych. A zatem przyjęcie stanowiska realistycznego w stosunku do teorii empirycznej, nakłada na nas obowiązek uznania także zobowiązań ontologicznych tej teorii w świecie obiektów matematycznych. Quine zatem wychodzi od faktu, iż matematyczne instrumentarium jest fragmentem teorii empirycznych. Jednak zupełnie inaczej niż instrumentalista interpretuje matematyczne zdania egzystencjalne — interpretuje je *at face value*, bezpośrednio, a nie jako pozbawione treści zdania pomocnicze. Zdania matematyki, w szczególności niosące zobowiązania ontologiczne zdania egzystencjalne, zaliczają się do zdań naukowych, na równi ze zdaniami obserwacyjnymi. Odrzucenie zdań matematycznych oznaczałoby odrzucenie całej teorii, której są one składową.

Kryterium prawdziwości zdań matematycznych jest więc ostatecznie to, czy występują one w uznanej teorii empirycznej. Dlatego pytanie o prawdziwość zdań matematycznych należy rozpatrywać w kontekście akceptowanych przez nas teorii empirycznych. Nie należy tego oczywiście rozumieć jako tezy, że zdania matematyczne są uzasadniane empirycznie. Status procedur dowodowych w matematyce pozostaje nienaruszony. Względy empiryczne decydują natomiast o tym, **która** teoria fizyczna, włącznie z jej matematyczną częścią (w szczególności aparatem dedukcyjnym) winna być uznana za teorię zinterpretowaną, i konsekwentnie, jakie obiekty — w tym matematyczne — winny być włączone do naszej ontologii.

Przyjęcie określonej ontologii dla matematyki uzależnione jest zatem od przyjęcia określonej ontologii dla teorii empirycznych. Można powiedzieć, że ontologia matematyki stanowi fragment ontologii zmatematyzowanych teorii fizycznych. W szczególności to, czy np. uznamy pełną ontologię teorii mnogości zależy od faktu, czy wykorzystanie pełnej siły teorii mnogości dla konstrukcji matematycznego instrumentarium teorii empirycznych jest konieczne.[6] Identyfikacja matematycznej składowej ontologii odbywa się poprzez analizę tego, jakie pojęcia matematyczne są używane w akceptowanej przez nas teorii empirycznej.[7]

5. PYTANIA DOTYCZĄCE ARGUMENTU Z NIEZBĘDNOŚCI

W tym paragrafie zostaną zasygnalizowane pewne problemy, które wiążą się z argumentem z niezbędności Quine'a.

5.1. Problem stopnia niezbędności

Należy podkreślić, że kryterium prawdziwości zdań matematycznych jest ich **niezbędność**, a nie tylko **obecność** w teoriach empirycznych. Aby zatem ustalić, jakie są zobowiązania ontologiczne danej teorii w świecie abstraktów konieczne jest ustalenie następujących faktów:

(i) Jaka jest kanoniczna postać badanej teorii empirycznej?

(ii) Jakie narzędzia matematyczne są w niej wykorzystywane?

(iii) Które z tych narzędzi są faktycznie **niezbędne** w badanej teorii?

Konieczna jest zatem rekonstrukcja logiczna matematycznego instrumentarium po to, aby uświadomić sobie, jakie są **najsłabsze** założenia wystarczające do jego zbudowania. Jeśli w danej teorii posługujemy się tylko tabliczką mnożenia do 100 to nie jest konieczne zakładanie pełnej ontologii liczb naturalnych. Jeśli posługujemy się arytmetyką liczb naturalnych (np. arytmetyką Peano PA), to nie jest konieczne zakładanie ontologii ZFC (teorii mnogości Zermelo-Fraenkla), *etc.* Uznanie danych technik za niezbędne jest zaś zrelatywizowane do stawianych celów i przyjmowanych standardów metodologicznych.

Quine dopuszcza zasadę postulowania nowych bytów dla uproszczenia teorii. Taka sytuacja może oczywiście występować też w matematyce: dołączenie silniejszych założeń prowadzić może do uproszczenia teorii, do uproszczenia dowodów (i oczywiście do rozstrzygnięcia pewnych problemów otwartych). Należy więc zwrócić

---

[6] Quine pisze, iż teorie matematyki czystej mogą pełnić co najwyżej rolę porządkującą, mogą służyć do upraszczania i ujednolicania teorii matematyki stosowanej, poza tym stanowią jedynie systemy niezinterpretowane: „Ta część matematyki, która jest potrzebna w naukach empirycznych ma ten sam status, co reszta nauki. Pozaskończone rozgałęzienia mają ten sam status, o ile pełnią rolę upraszczającego usystematyzowania (simplificatory rounding out), jednak reszta ma status niezinterpretowanych systemów" [Quine 1984, 788]. „Uznaję nieprzeliczalne nieskończoności tylko dlatego, że są one konieczne dla systematyzacji zagadnień. Obiekty wykraczające poza te potrzeby, np. $Beth_\omega$ lub liczby nieosiągalne uważam za matematyczną rozrywkę i za pozbawione statusu ontologicznego" [Quine 1986, 400].

[7] Problemy tego typu są szczegółowo dyskutowane w części IV książki [Wójtowicz 2003].

uwagę na to, jaki jest poziom niezbędności danego instrumentarium matematycznego w teorii fizycznej. A zatem argument z niezbędności w swej najsłabszej wersji dotyczy obiektów, które są absolutnie niezbędne — tzn. bez nich nie dałoby się skonstruować teorii nawet kosztem jej komplikacji. Pewne wersje tego argumentu mogą prowadzić do zaakceptowania założeń egzystencjalnych (czyli uznania istnienia obiektów), których rola polega na systematyzacji i uproszczeniu (byłoby to więc wewnątrzmatematyczne kryterium pragmatyczne). Można więc powiedzieć, że odpowiedź na pytanie o poziom niezbędności jest zrelatywizowane do przyjmowanych standardów metodologicznych, dotyczących w szczególności prostoty, efektywności i wygody konstruowanych teorii. Quine wspomina o tym problemie np. w [Quine 1960, 306] pisząc, iż uświadomienie sobie jakie najsłabsze założenia są konieczne dla prowadzenia rozumowań pewnego typu pogłębia nasze zrozumienie zagadnienia. Zwraca także uwagę na heurystyczną rolę silnych technik, które prowadzą do nowych odkryć (które są później często osiągane także słabszymi środkami).[8] Pytania dotyczące istnienia obiektów matematycznych nie mają więc absolutnej odpowiedzi — każda odpowiedź bowiem jest udzielana zarówno w kontekście pewnej teorii, jak i relatywnie do przyjmowanych standardów.

5.2. Problem stosowalności

W swoim głośnym eseju Wigner pisze, że „cud stosowalności języka matematyki do formułowania praw fizyki jest wspaniałym darem, którego nie rozumiemy, ani na który nie zasłużyliśmy" [Wigner 1960, 14]. Podobnie wypowiada się Weinberg: „Jest bardzo dziwne, że matematycy, kierowani poczuciem matematycznego piękna tworzą formalne struktury, które później są przydatne fizykom, pomimo iż nie były tworzone z taką intencją" [Weinberg 1993, 125]. W literaturze często spotyka się tezy, że możliwość matematycznego opisu świata jest niezrozumiałym — choć oczywiście bardzo pozytywnym — faktem. Można byłoby powiedzieć, że w jakiś tajemniczy sposób matematyka jest matrycą świata, ale dlaczego tak jest — nikt nie wie. Platoński świat rozmaitości różniczkowych pasuje do kosmologii, zaś świat przestrzeni Hilberta — do mechaniki kwantowej. Jest to piękne, ale tajemnicze i zasadniczo niewyjaśnialne.

Jak sam fakt stosowalności wyjaśniany jest w ramach argumentu z niezbędności? Czy w ramach tego argumentu można wytłumaczyć, jaki jest powód tego, iż matematyka stosuje się do opisu świata fizycznego? Sam argument z niezbędności nie wyjaśnia, **dlaczego** matematyka się stosuje, ale też i nie stawia sobie tego zadania. Jego celem jest identyfikacja zobowiązań ontologicznych teorii. Dla wyjaśnienia pewnej klasy zjawisk konstruujemy pewną teorię. W skład tej teorii wchodzą postulaty dotyczące np. związków kauzalnych między przedmiotami obserwowalnymi, istnienia obiektów teoretycznych czy wreszcie twierdzenia matematyczne. Fakt, że

[8] Problem precyzacji i dyskusji w tym kontekście argumentacji Quine'a jest przedmiotem odrębnych analiz w części IV [Wójtowicz 2003].

pewna teoria matematyczna przydaje się w wyjaśnianiu zjawisk nie jest zatem niczym bardziej tajemniczym niż fakt, że w ogóle możliwe jest skonstruowanie jakiejkolwiek teorii wyjaśniającej dane empiryczne. Można więc odpowiedzieć tak: matematyka daje się zastosować w opisie świata fizycznego, bo świat składa się z obiektów fizycznych i obiektów matematycznych powiązanych pewnymi relacjami. Te obiekty i relacje postulowane są w ramach naszej teorii świata i należy traktować je *at face value* — tzn. nadawać im realistyczną interpretację. Jednak problem, **dlaczego** świat jest taki, podobnie jak problem **dlaczego** obowiązuje prawo grawitacji Newtona nie jest podejmowany. Ten fakt jest faktem pierwotnym i stanowi punkt wyjścia dalszych badań.[9]

5.3. Teza o logice pierwszego rzędu. Ontologia a ideologia

Quine podaje proste i precyzyjne kryterium ontologii. Nie jest ono oczywiście sformułowane w metodologicznej próżni. Quine zdecydowanie opowiada się za tezą, że podanie precyzyjnego kryterium istnienia możliwe jest jedynie dla teorii sformułowanych w języku ekstensjonalnej logiki pierwszego rzędu. Tylko ona jest prawdziwą logiką. Tezy Quine'a dotyczące ontologii mają więc silny związek z założeniami, które można określić mianem „założeń ideologicznych".

Problem zależności między ontologią a ideologią, omawiany był przez Quine'a w artykule [Quine 1964]. Quine rozważa tam problem standardów redukcji ontologicznej. Jego przykłady dotyczą: (i) redukcji teorii liczb naturalnych do teorii klas (tj. po prostu teorii mnogości); (ii) redukcji teorii, w której występują mieszane liczby (tj. wielkości mianowane) do teorii, w której są tylko czyste liczby rzeczywiste. Quine zauważa, że jeśli przyjmiemy dostatecznie liberalne standardy redukcji ontologii, to każda teoria pierwszego rzędu może zostać zredukowana do teorii arytmetycznej, dotyczącej liczb (poprzez użycie predykatu prawdy).[10] Redukcja do ontologii liczb wymagałaby zatem zapłacenia pewnej ceny w planie ideologicznym. Nie uznajemy jednak tych redukcji za zadowalające, gdyż nasze rozumienie terminu „dopuszczalna

---

[9] W pracy [Colyvan 2001] autor stawia stanowisku Quine'a zarzut, iż nie wyjaśnia ono faktu stosowalności matematyki. Rzeczywiście, realista odwołujący się do argumentacji Quine'a nie potrafi wyjaśnić samego faktu stosowalności. Pojawia się tu problem metafilozoficzny (a być może terminologiczny): co znaczy zwrot „wskazać przyczynę, dla której matematyka stosuje się do opisu świata". W jakim sensie można mówić o wyjaśnieniu tego problemu? Nie jest dla mnie jasne, czy rzeczywiście ten fakt może zostać wyjaśniony — tzn.: zredukowany do czegoś bardziej pierwotnego; sądzę raczej, że winien stanowić punkt wyjścia dyskusji dotyczącej realizmu matematycznego. Jeśli jednak uznamy, że sensowne jest poszukiwanie powodów stosowalności matematyki, to niewątpliwie propozycja Quine'a nie jest tu atrakcyjna jako program badawczy.

[10] Użycie predykatu prawdy polega na zastąpieniu zdania α zdaniem $Tr([\alpha])$, gdzie $[\alpha]$ jest numerem Gödlowskim zdania α, zaś Tr — predykatem prawdy. Taka redukcja zachowuje prawdziwość zdań redukowanej teorii, lecz aby wyrazić sam predykat prawdy, konieczne jest użycie silnych środków.

redukcja ontologiczna" opiera się na bardziej restryktywnych ograniczeniach metodologicznych. Kiedy bowiem rozważamy redukcję ontologiczną teorii T_1 do innej teorii T_2 oczekujemy, że spełnione będą zależności między dziedzinami przedmiotowymi, stanowiącymi przedmiot opisu tych teorii. Nie wystarczy przypisanie wyrażeniom redukowanej teorii pewnych wyrażeń teorii redukującej. Quine twierdzi, że konieczne jest istnienie tzw. funkcji pełnomocnictwa (*proxy function*), która ustala zależność między obiektami starej i nowej teorii.[11]

Problem redukcji ontologicznej jest ściśle związany ze standardami przyjmowania takiej a nie innej ontologii. Swobodnie mówiąc, można powiedzieć, że niekiedy liberalizacja ideologii pozwala na przyjęcie bardziej restryktywnej ontologii.[12] Argumentacja Quine'a i jego kryterium istnienia opiera się więc na pewnego rodzaju decyzjach ideologicznych, dotyczących wyboru języka, w jakim mają być formułowane teorie naukowe i przyjęcia kanonicznej notacji, dla której pytania ontologiczne są dobrze postawione. Tezę tę określa się zwyczajowo mianem „tezy o logice pierwszego rzędu". W myśl tej tezy to właśnie logika pierwszego rzędu jest prawdziwą logiką.

5.4. Problem kwantyfikatorów Henkina

W [Quine 1969] Quine dyskutuje problem zobowiązań ontologicznych zdań z kwantyfikatorem Henkina, tj. zdań postaci $Q_H x,y,x',y'\varphi(x,y,x',y')$, gdzie Q_H jest nieliniowym prefiksem kwantyfikatorowym postaci: „Dla dowolnego x istnieje x, i dla dowolnego y istnieje y' **niezależne od x oraz x'**, takie, że $\varphi(x,y,x',y')$." Przykłady takich zdań to „Pewien krewniak każdego wieśniaka i pewien krewniak każdego mieszczucha nienawidzą się nawzajem" lub „Pewna książka każdego pisarza została omówiona w pewnym eseju każdego krytyka". Zdań tych nie da się wyrazić w postaci liniowej z użyciem kwantyfikacji po indywiduach.[13] Dlatego stosuje się zapis nieliniowy:

[11] W ogólnym wypadku, taka redukcja ontologiczna teorii T_1 do T_2 ma następującą postać: wskazana zostaje pewna funkcja f: $U_2 \to U_1$ (tzn. z nowego uniwersum na stare uniwersum) o tej własności, że jeśli P_1 jest predykatem redukowanej teorii T_1, to można utworzyć predykat P_2 nowej teorii T_2 taki, że:

Dla dowolnego y, jeśli $y = f(x)$, to $P_1(y) \Leftrightarrow P_2(x)$.

[12] Jest to widoczne np. na przykładzie koncepcji Fielda, w myśl której wprowadzenie metalogicznego pojęcia niesprzeczności jako pierwotnego pozwala na eliminację rozważań teoriomodelowych z metalogiki. Podobnie jest w wypadku szeregu innych stanowisk antyrealistycznych (np. [Hellman 1989], [Chihara 1990]), które opierają się na przyjęciu innej klasy pojęć jako bazowych. Krytyczną analizę tych koncepcji Czytelnik znajdzie w [Wójtowicz 2003]

[13] Jest kilka możliwości zapisania zdania tego typu w postaci liniowej, niektóre z nich to:

(i) $\forall x \forall y \exists x' \exists y' \varphi(x,y,x',y')$ — jednak treść tego zdania jest inna, ponieważ zarówno x' jak i y' zależą od x, oraz od y.

(ii) $\forall x \exists x' \forall y \exists y' \varphi(x,y,x',y')$ — treść tego zdania też nie odpowiada oryginałowi: tutaj y' zależy od x' oraz od x.

Argumentacja w pozostałych przypadkach jest podobna.

$$\begin{matrix} \forall x \exists x' \\ \forall y \exists y' \end{matrix} \varphi(x,y,x',y').$$

Stwierdzenie, iż „y' nie zależy od x" znajduje swoją formalizację poprzez wprowadzenie pojęcia funkcji. Powyższe zdanie jest równoważne zdaniu „$\exists F,G \forall x,y$ $\varphi(x,y,F(x),G(y))$", gdzie F, G są funkcjami. Rozważmy tu przykład zdania o pisarzach i krytykach. Zdanie „$\exists F,G \forall x,y$ książka $F(x)$ pisarza x została omówiona w eseju $G(y)$ krytyka y" wyraża fakt, że każdy krytyk y napisał pewien esej $G(y)$, w którym omówił zbiór książek $\{F(x)$: x jest pisarzem$\}$ — przy czym w każdym eseju $G(y)$ został opisany **ten sam zbiór książek** $\{F(x)$: x jest pisarzem$\}$. Wyrażając to jeszcze inaczej: istnieje taki zbiór esejów — po jednym od każdego krytyka — że we wszystkich tych esejach jest omówiony ten sam ustalony zbiór książek — po jednej od każdego pisarza. Jednak przy tej eksplikacji mowa już o istnieniu **zbioru książek i zbioru esejów**.

Quine twierdzi, iż zdania z kwantyfikatorem Henkina faktycznie niosą w sobie zobowiązania do istnienia funkcji, gdyż prawdziwą formę logiczną zdania typu $Q_H\varphi$ można odkryć po przekształceniu do go kanonicznej, liniowej postaci. Dopiero postać liniowa pozwala też na ustalenie, jakie są prawdziwe zobowiązania ontologiczne takiego zdania — pozornie bowiem mówi ono o indywiduach, jednak tak naprawdę jest w nich ukryta forma kwantyfikacji po funkcjach (podobną opinię wyraża też Barwise w [Barwise 1979, 49]). Dlatego, aby ustalić zobowiązania ontologiczne danego zdania α należy najpierw dokonać jego tłumaczenia do postaci liniowej. Być może wtedy **konieczne** będzie użycie kwantyfikacji po obiektach wyższych rzędów — będzie to świadczyło o tym, że zdanie α zobowiązuje się do istnienia tych obiektów.

Decyzje dotyczące ontologii są więc — do pewnego stopnia — pochodne w stosunku do decyzji dotyczących ideologii. W opinii niektórych komentatorów, przyjmowana przez Quine'a ideologia jest zbyt restryktywna (opinię taką wyraża np. Shapiro w [Shapiro 1997, 17]). Pojawia się pytanie, jakie skutki dla dyskusji ma osłabienie rygorów ideologicznych i jaka jest zależność między podejmowaniem decyzji ideologicznych i ontologicznych. Dyskusja tego problemu wykracza jednak poza ramy tego artykułu.[14]

5.5. Czy obiekty matematyczne oddziałują przyczynowo?

Niekiedy w literaturze pojawia się następujący argument przeciwko stanowisku realistycznemu: wyobraźmy sobie, że obiekty matematyczne znikają. Czy spowoduje to jakiekolwiek zmiany w świecie fizycznym? Nie — świat fizyczny bez obiektów

[14] Możliwe jest sformułowanie pewnego uogólnienia kryterium Quine'a, tak, aby objęło ono szerszą klasę logik. To uogólnienie i dyskusję zależności pojęcia zobowiązania ontologicznego od zasad metateoretycznych dotyczących np. pojęć przyjmowanych jako pierwotne w danej semantyce Czytelnik znajdzie w [Wójtowicz 2003].

matematycznych będzie taki sam, jak świat fizyczny w którym te obiekty istnieją. Nie odgrywają one bowiem żadnej roli przyczynowej w świecie — a zatem założenie o ich istnieniu jest obojętne z punktu widzenia prawdziwości twierdzeń o świecie fizycznym. Tym samym nie ma powodu, aby zakładać ich istnienie.

Zarzut ten opiera się na następujących założeniach: (i) teoria świata dobrze wyjaśnia dane; (ii) w ramach tej teorii nie postulujemy istnienia związków kauzalnych między obiektami fizycznymi i matematycznymi. A zatem: gdyby tych obiektów nie było, to świat obserwowalnych zjawisk wyglądałby tak samo, gdyż nie uległyby zmianie zależności przyczynowe w świecie fizycznym. *Ergo*: nie ma powodu, aby przyjmować istnienie obiektów abstrakcyjnych.[15]

Argument z niezbędności nie implikuje oczywiście istnienia związków kauzalnych między obiektami matematycznymi a fizycznymi, dotyczy on bowiem ogólnych kryteriów przyjmowania ontologii. To nie związki kauzalne z przedmiotem obserwacji stanowią kryterium istnienia. Można wręcz powiedzieć, że rola związków przyczynowych w przyjmowanej ontologii nie jest wyróżniona. Dla wyjaśnienia danych konstruujemy pewną teorię wraz z siatką obiektów powiązanych pewnymi relacjami. Pewne obiekty z tej siatki w ogóle nie muszą wchodzić w relacje kauzalne, a jedynie w relacje np. izomorfizmu, podobieństwa *etc*. Oczywiście, przy wyborze siatki kierujemy się zasadą prostoty, wygody opisu i innymi kryteriami (np. także oszczędnością ontologiczną), jednak kryteria te nie odwołują się wyłącznie do związków przyczynowych. W skład przyjmowanej ontologii wchodzą obiekty, które w naszej siatce przekonań odgrywają stosowną rolę, nie muszą być one jednak połączone z przedmiotem obserwacji związkami przyczynowymi. Argument z niezbędności jest więc odporny na tego typu zarzut.

5.6. Czy twierdzenia matematyczne można sfalsyfikować empirycznie?

Rozważmy następujące rozumowanie: Jeśli pewne zdanie α zostało uznane na podstawie pewnych przesłanek empirycznych, znaczy to, że w pewnej sytuacji możliwe byłoby odrzucenie tego zdania. W szczególności, jeśli uznajemy, że twierdzenia matematyczne są weryfikowane empirycznie (w pośredni sposób — poprzez weryfikację całej teorii, do której należą), to znaczy to, że mogłyby zostać również sfalsyfikowane empirycznie. A zatem można wyobrazić sobie taki wynik pewnego doświadczenia, który falsyfikuje dane twierdzenie matematyczne. Tym samym, z koncepcji Quine'a (w ramach której przecież twierdzi się, że prawdziwość twierdzeń matematycznych jest weryfikowana doświadczalnie jako fragment teorii empirycznej) wynika, iż twierdzenia matematyczne mogą być weryfikowalne empirycznie. Jest to sprzeczne z faktem, że źródłem wiedzy i pewności matematycznej są dowody — i prowadzi do zastąpienia dowodu matematycznego kryterium doświadczalnym. To

[15] Oczywiście zarzut ten wymierzony jest przeciwko argumentowi z niezbędności. Nie dotyczy on innych form argumentacji na rzecz realizmu matematycznego.

oczywiście jest niezgodne z praktyką matematyczną i z samą naturą matematyki. Argumentacja Quine'a prowadzi więc do błędnych wniosków i tym samym nie można uznać jej za wiarygodną.

Rzeczywiście, byłoby dziwne, gdyby istniał eksperyment rozstrzygający np. prawdziwość twierdzenia, iż 2+2=4. Rozważmy więc pewną odpowiedź realisty na ten zarzut.[16] Realista mógłby odpowiedzieć następująco: gdyby świat był taki, że np. dwa obiekty zestawione z dwoma innymi znikałyby, to prawdziwe byłoby twierdzenie, że 2+2=0 (i to właśnie ono byłoby potwierdzone empirycznie). Ale w naszym świecie obiekty nie znikają, a więc to twierdzenie, że 2+2=4 jest potwierdzane empirycznie.[17]

Odpowiedź ta jest jednak bardzo powierzchowna i naiwna. Zauważmy, że fakt, czy obiekty fizyczne znikają czy nie znikają, nie ma nic wspólnego z weryfikacją empiryczną twierdzenia iż 2+2=4. Dotyczy jedynie takiej interpretacji tego twierdzenia w świecie fizycznym, przy której symbol '+' interpretowany jest jako operacja fizycznego sumowania obiektów. Nie ma to nic wspólnego z falsyfikacją twierdzenia matematycznego 2+2=4, które odnosi się do liczb naturalnych i jest prostym wnioskiem z aksjomatów PA. Weryfikowana natomiast jest cała teoria empiryczna wraz z matematycznym instrumentarium. Jeśli obiekty nie znikają — to znaczy, że sumowanie przedmiotów fizycznych może być opisywane za pomocą twierdzeń arytmetyki Peano. Skoro zaś teoria fizyczna została uznana za zinterpretowaną, to w szczególności należy założyć istnienie pewnych obiektów abstrakcyjnych (liczb). Gdyby natomiast świat był taki, że np. czwórki zsumowanych obiektów fizycznych znikają, to znaczyłoby to, że teoria empiryczna opisująca świat nie powinna posługiwać się arytmetyką Peano, ale np. teorią pierścienia Z_4 (czyli dodawania *modulo* 4), lub jakąś inną teorią. Oczywiście nadal „2+2=4" pozostawałoby twierdzeniem arytmetyki Peano, ale arytmetyka Peano zostałaby uznana za teorię niezinterpretowaną.

Argumentacja Quine'a na rzecz realizmu matematycznego (w szczególności na rzecz tezy, że pewne zdania wypowiedziane w języku matematyki są prawdziwe, podczas gdy inne są fałszywe) dotyczy pewnej szerszej sytuacji. Język matematyki jest podjęzykiem języka nauki. Do tworzonej empirycznej teorii świata wprowadzamy pewne terminy, formułujemy pewne hipotezy i następnie niektóre z nich — jeśli okażą się zgodne z danymi empirycznymi — uznajemy za prawdziwe. Odbywa się to w kontekście pewnych założeń metodologicznych: przy tworzeniu teorii odwołujemy się (w jawny lub niejawny sposób) do postulatów prostoty, efektywności, *etc.* Jednak to teoria jako całość jest potwierdzana, tworzy ona bowiem pewien złożony system pojęć, przyjmowany jako całość. To wyjaśnia też pewną naiwność zarówno cytowa-

[16] Podaję ją za pracą [Bigaj 1997], gdzie poddana jest słusznej krytyce.

[17] Oczywiście przykład twierdzenia „2+2=4" nie jest zbyt wymyślny, niemniej jednak nie chodzi tu o podawanie złożonych przykładów, ale o zwrócenie uwagi na pewne zagadnienie. Fakt, czy to zdanie „2+2=4", twierdzenie o jednostajnej ciągłości funkcji ciągłej na odcinku [0,1], hipoteza kontinuum, albo aksjomat istnienia liczby mierzalnej miałyby być weryfikowane empirycznie nie ma — w tym kontekście — większego znaczenia.

nego tu argumentu antyrealisty, jak i odpowiedzi realisty. Teza „2+2=4" nie jest bowiem weryfikowana ani odrzucana w izolacji od reszty systemu, na podstawie pojedynczych doświadczeń, a jedynie jako fragment teorii empirycznej.

6. PODSUMOWANIE

Zasadnicze — ważne dla dyskusji problemu matematycznego realizmu — elementy filozoficznego światopoglądu Quine'a można podsumować w kilku punktach:

1. Quine odrzuca postulat fundującego charakteru „filozofii pierwszej". Analizy filozoficzne są nierozerwalne związane z analizami metanaukowymi i winny być prowadzone w kontekście wyników nauk szczegółowych. W szczególności, pytania ontologiczne dotyczące matematyki winny być analizowane w świetle analiz dotyczących roli matematyki w naukach empirycznych.

2. Punktem wyjścia wszelkich teorii (zdroworozsądkowych, naukowych, ontologicznych) są dane zmysłowe. Na podstawie tych danych można skonstruować wiele wyjaśniających je teorii. W decyzjach dotyczących wyboru teorii obecne są czynniki pragmatyczne, dotyczące prostoty, efektywności, czy nawet oszczędności ontologicznej teorii.

3. Jednostką sensu empirycznego jest cała teoria. Poszczególne zdania mają sens empiryczny tylko jako fragment pewnego systemu. Nie można zatem mówić o weryfikacji empirycznej poszczególnych zdań, a jedynie o ich weryfikacji w kontekście całej teorii.

4. Postulowanie istnienia obiektów określonego typu może zwiększać efektywność i prostotę teorii. Quine podkreśla jednak, że choć wszystkie obiekty (fizyczne, teoretyczne i abstrakcyjne) są przedmiotami postulowanymi w danej teorii, należy uznać je za realne.

5. Obok przedmiotów obserwowalnych należy założyć także istnienie obiektów teoretycznych i matematycznych. Nie różnią się one sposobem istnienia, a jedynie własnościami. Ich status i rola w teorii jest identyczna — wszystkie bowiem Quine określa jako obiekty teoretyczne; wszystkie pełnią w teorii równorzędne role.

6. Wskaźnikiem ontologii, który umożliwia stwierdzenie, jakiego typu przedmiotów istnienie postuluje dana teoria, jest kwantyfikator egzystencjalny. Przyjęcie kwantyfikatorowego kryterium istnienia wiąże się z przyjęciem pewnych ograniczeń metodologicznych, dotyczących postaci teorii empirycznych. Problem ontologii jest bowiem dobrze postawiony tylko wówczas, gdy teoria jest dana w kanonicznej postaci. Według Quine'a, taką postać mają teorie w języku rachunku predykatów pierwszego rzędu.

7. Istnienie obiektów matematycznych uzasadniane jest w ten sam sposób, jak istnienie dowolnego typu obiektów postulowanych w ramach teorii empirycznych.

Stanowisko Quine'a akceptuje również Putnam. Zgadza się z tezą, że ontologia spójnej teorii winna obejmować wszystkie obiekty, o których mówi ta teoria. W przeciwnym razie nieuzasadniona byłaby realistyczna interpretacja teorii naukowych, a prawa nauki należałoby uznać za fikcje.[18] W szczególności, skoro w teoriach fizycznych odwołujemy się wprost do obiektów matematycznych i kwantyfikacja obejmuje obiekty matematyczne, należy uznać ich istnienie. Dlatego argument z niezbędności nazywa się w literaturze niekiedy „argumentem Quine'a–Putnama".

BIBLIOGRAFIA

Barwise J. (1979), „On branching Quantifiers in English", *Journal of Philosophical Logic,* 8, 47-80.

Bigaj T. (1997), *Matematyka a świat realny*, Wydawnictwa WFIS, Warszawa.

Chihara C. (1990), *Constructibility and mathematical existence*, Clarendon Press, Oxford.

Colyvan M. (2001), „The miracle of applied mathematics", *Synthese*, 127, 265-277.

Hellman G. (1989), *Mathematics without Numbers*, CLARENDON Press, Oxford.

Putnam H. (1971), *Philosophy of Logic*, George Allen & Unwin.

— (1975), „What is mathematical truth?", [w:] *Mathematics, matter and method: philosophical papers*, t.1, Cambridge University Press. 60-78. Przekład polski: „Czym jest prawda matematyczna?", [w:] *Współczesna filozofia matematyki*, Murawski R. (red.), PWN, Warszawa, 2002, 244-265.

Quine W.V.O. (1953), „Two dogmas of empiricism", [w:] *From a Logical Point of View*, Cambridge, Harvard University Press, s.20-46, przekład polski: „Dwa dogmaty empiryzmu" [w:] *Z punktu widzenia logiki*, Warszawa: PWN, 1969, 35-70.

— (1960), *Word and object*, MIT, tłumaczenie polskie: *Słowo i przedmiot*, tłum. C.Cieśliński, Alatheia, Warszawa, 1999.

— (1964), „Ontological reduction and the world of numbers", *The Journal of Philosophy*, LXI (7), 209-216.

— (1969), „Existence and Quantification", [w:] *Ontological Relativity and Other Essays*, New York: Columbia University Press, 91-113.

— (1981), „Things and Their Place in Theories", [w:] *Theories and Things*, Cambridge, Mass: The Belknap Press of Harvard University Press, 1-23. Przekład polski: „Rzeczy i ich miejsca w teoriach", [w:] Szubka T. (red.), *Metafizyka w filozofii analitycznej*, Lublin, TN KUL, 1995, 31-52.

— (1984), „Review of Parsons C. *Mathematics in Philosophy*", *Journal of Philosophy*, (81), 783-794.

— (1986), „Reply to Charles Parsons", [w:] Hahn L., Schlipp P.A. (red.), *The philosophy of W.V.Quine*, La Salle, Il: Open Court), 396-403.

— (1986a), *Granice wiedzy i inne eseje filozoficzne*, tłum. B. Stanosz, PIW, Warszawa.

Shapiro S. (1997), *Philosophy of Mathematics. Structure and Ontology.* Oxford University Press. New York, Oxford.

Weinberg S. (1993), *Dreams of a final theory*, London, Vintage.

Wigner E.P. (1960), „The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences", Communications in Pure and Applied Mathematics, 13, 1-14.

[18] „Jeżeli mówienie o liczbach i „przyporządkowaniach" pomiędzy masami, itd. a liczbami jest „teologią" (w pejoratywnym sensie), to prawo powszechnego ciążenia także jest teologią" [Putnam 1975, 262]. W [Putnam 1971, 57] zauważa — komentując z aprobatą argumentację Quine'a — że byłoby intelektualnie nieuczciwe negowanie istnienia obiektów, o których mówimy w teoriach naukowych i które są w tych teoriach niezbędne.

Wójtowicz K. (2003), *Spór o istnienie w matematyce*, Wydawnictwo Naukowe Semper, Warszawa.