Filozofia Nauki
Rok XII, 2004, Nr 1(45)

Izabela Bondecka-Krzykowska

Strukturalizm jako alternatywa dla platonizmu w filozofii matematyki

WSTĘP

Strukturalizm to stosunkowo nowy kierunek w filozofii nauki, któremu przypisuje się szczególne znaczenie dla filozofii nauk humanistycznych i przyrodniczych. Jednak kierunek ten jest obecnie intensywnie rozwijany również w filozofii matematyki. Definicja strukturalizmu matematycznego, pochodząca z drugiego wydania *The Cambridge Dictionary of Philosophy*, brzmi następująco:

> Strukturalizm matematyczny to pogląd, że przedmiotem badań każdej gałęzi matematyki jest struktura lub struktury. Slogan łączony z tym kierunkiem brzmi: 'matematyka jako nauka o strukturach'. Definiuje się „system liczb naturalnych" jako nieskończony zbiór obiektów z jednym wyróżnionym obiektem początkowym i z relacją następnika, który spełnia zasadę indukcji matematycznej. Przykładami systemu liczb naturalnych są liczebniki arabskie i nieskończony ciąg momentów czasu. Zgodnie ze strukturalizmem, arytmetyka jest nauką o formie lub strukturze podobnej do systemów liczb naturalnych. Zgodnie z tym poglądem, liczba naturalna to coś jak urząd w organizacji lub miejsce we wzorcu. Podobnie analiza rzeczywista mówi o strukturze liczb rzeczywistych.
>
> Problemy filozoficzne związane ze strukturalizmem dotyczą natury struktur i ich miejsc. Ponieważ struktura jest bytem podobnym do uniwersaliów, strukturalizm wykorzystuje tradycyjne poglądy dotyczące uniwersaliów, takie jak realizm czy nominalizm (s. 543).

Strukturalistyczne ujęcie wiedzy matematycznej ma na celu stworzenie pewnej alternatywy dla platonizmu, bez konieczności odrzucenia realizmu jako takiego. Najczęściej mówi się o platonizmie i realizmie jak o pojęciach będących synonimami, w istocie jednak zachodzą między tymi doktrynami różnice. Strukturalizm, rozumiany zgodnie z definicją przedstawioną powyżej, nie jest odmianą platonizmu. Zwolennicy platonizmu twierdzą mianowicie, że obiekty badane przez daną gałąź matematyki, np. liczby w wypadku teorii liczb, istnieją niezależnie od badającego podmiotu, a nawet niezależnie od czasu i przestrzeni. Zakładają oni również, że poszczególne obiekty, a zatem również liczby, są niezależne od siebie nawzajem, że natura poszczególnych liczb nie zależy od innych liczb. Strukturaliści natomiast odrzucają ten rodzaj ontologicznej niezależności pomiędzy liczbami naturalnymi. Istotą liczby naturalnej są, według nich, jej relacje z innymi liczbami naturalnymi. Strukturaliści uważają, że teoria liczb zajmuje się pojedynczą abstrakcyjną strukturą, wzorcem podobnym do dowolnego nieskończonego ciągu obiektów z relacją następnika i z jednym wyróżnionym obiektem początkowym, spełniającymi aksjomat indukcji (drugiego rzędu). Liczba 2 nie jest zatem niczym więcej niż drugą pozycją w strukturze liczb naturalnych.

Przez strukturalistyczne podejście do matematyki rozumiemy zatem pogląd głoszący, że do obiektów matematycznych odwołujemy się zawsze w kontekście pewnej struktury i że wszystko, co można o nich powiedzieć, musi dać się wyrazić w terminach podstawowych relacji tej struktury.

Wszystkie kierunki filozoficzne związane z metodą strukturalną, nie tylko w matematyce, posługują się pojęciem *struktury*. Pojawia się zatem pytanie, jak zdefiniować to pojęcie i w jaki sposób je interpretować.

Na ogół przez strukturę w matematyce rozumie się dziedzinę obiektów wraz z pewnymi funkcjami i relacjami określonymi na tej dziedzinie, spełniającymi określone warunki. Paradygmatycznymi przykładami struktur są elementarne struktury rozważane w algebrze abstrakcyjnej, np. struktura grupy. To ostatnie pojęcie definiuje się na ogół następująco:

Grupa to niepusta dziedzina G, wraz z funkcją dwuargumentową określoną w G, oznaczaną zwykle jako $\circ$, taką, że:

- działanie $\circ$ jest łączne,
- istnieje dokładnie jeden element e taki, że dla każdego $a \in G$, $a \circ e = e \circ a = a$; element ten jest nazywany elementem neutralnym dla $\circ$,
- dla każdego elementu a należącego do G istnieje (dokładnie jeden) element b odwrotny względem $\circ$, tj. $a \circ b = b \circ a = e$.

Przykładem grupy są liczby całkowite z działaniem dodawania.

Język, w jakim opisujemy strukturę grupy, odwołuje się do znanych typów obiektów matematycznych, takich jak dziedzina, funkcja czy relacja, o których chętnie myśli się w kategoriach zbiorów. Takie podejście prowadzi zaś do teoriomnogościowego pojęcia struktury. Traktuje się dziedzinę struktury jako zbiór, a funkcje i relacje w zwykły teoriomnogościowy sposób. Struktura jako taka staje się w ten sposób pewną *n-ką* uporządkowaną, czyli pewnym obiektem teorii mnogości. (W wypadku grupy jest to para uporządkowana $\langle G, \circ \rangle$ albo trójka uporządkowana $\langle G, \circ, e \rangle$) Takie ujęcie struktur zmienia stwierdzenie, że matematyka jest nauką o strukturach, w znaną tezę głoszącą, że wszystkie obiekty matematyczne mogą być interpretowane jako odpowiednie zbiory.

Teoriomnogościowe pojęcie struktury ma pewien mankament. Gdy używamy podejścia strukturalistycznego, mówiąc o jakimś rodzaju obiektów matematycznych, to zakładamy istnienie zbiorów. Powstaje więc pytanie, jak w takiej sytuacji interpretować same zbiory. Nie jest to jednak jedyne możliwe podejście. Stewart Shapiro proponuje np. aksjomatyczną teorię struktur, w której pojęcie struktury jest pojęciem pierwotnym.[1]

We współczesnej filozofii matematyki znajdujemy wiele różnych koncepcji strukturalistycznych: poczynając od strukturalizmu eliminacyjnego Charlesa Parsonsa, poprzez teorię wzorców Michaela Resnika i aksjomatyczną teorię struktur Shapiro, a kończąc na strukturalizmie modalnym Geoffreya Hellmana.[2] Cechą rozróżniającą te koncepcje jest sposób, w jaki podchodzą one do problemu definiowania struktur i ich istnienia. Ze względu na to kryterium wyróżnić możemy dwa podstawowe stanowiska w strukturalizmie matematycznym:

a) Strukturalizm *in re* (strukturalizm eliminacyjny)

Z punktu widzenia strukturalizmu eliminacyjnego, wyrażenia arytmetyki, takie jak np. „2+3=5", nie odnoszą się do konkretnych obiektów oznaczanych przez 2, 3 i 5. Każde wyrażenie tego typu jest swego rodzaju generalizacją, wyraża własność, która odnosi się do wszystkich systemów liczb naturalnych. Zdanie „2+3=5" sprowadza się do stwierdzenia: „W każdym systemie liczb naturalnych, obiekt na drugim miejscu dodany do obiektu na trzecim miejscu w tym systemie, daje obiekt, który w danym systemie zajmuje piątą pozycję". W podobny sposób można rozumować w odniesieniu do stwierdzeń ontologicznych. Np. „1 istnieje", można rozumieć jako „Każdy system liczb naturalnych ma obiekt na pierwszym miejscu". Zatem, z punktu widzenia strukturalizmu *in re*, wszystkie zdania dotyczące liczb są generalizacjami. Strukturalizm *in re* stwierdza ponadto, że struktura liczb naturalnych to nic więcej niż systemy, które są jej przykładami. Jeżeli zniszczymy wszystkie takie systemy, to wyeliminujemy też samą strukturę.

Program przedstawienia wyrażeń matematycznych jako generalizacji jest całkowicie zgodny z duchem strukturalizmu, ale nie przesądza, że struktury są obiektami matematycznymi. Mówienie o liczbach naturalnych jest bowiem tylko wygodną formą mówienia o wszystkich systemach, które są przykładami struktury liczb naturalnych. Dlatego też wielu autorów określa ten nurt jako „strukturalizm bez struktur".

Takie podejście wymaga ontologii bazowej, dziedziny rozważań, której obiekty będą zajmować miejsca w strukturach *in re*. Taka ontologia bazowa musi być oczywiście odpowiednio bogata, nie interesuje nas przy tym specjalnie natura samych tych obiektów, lecz ich ilość. Strukturalizm eliminacyjny wymaga bowiem nieskończonej

[1] Por. Shapiro [1989] i Shapiro [1997].

[2] Omówienie podstawowych założeń wszystkich tych koncepcji przedstawiamy w artykule *Strukturalizm w filozofii matematyki* (w przygotowaniu).

ontologii bazowej. Przykładami tej wersji strukturalizmu matematycznego są koncepcje Parsonsa i Hellmana.

b) Strukturalizm *ante rem*

Zwolennicy tego podejścia twierdzą, że struktury istnieją niezależnie od tego, czy istnieją ich przykłady. W odniesieniu do struktur *ante rem* mówi się często, że mają one „pierwszeństwo" ontologiczne przed swoimi przykładami. Zgodnie z tym nie możemy stwierdzić, na przykład, że dany system jest modelem liczb naturalnych, ponieważ jest przykładem struktury liczb naturalnych. Jest odwrotnie. To, co sprawia, że system jest przykładem struktury liczb naturalnych, to fakt, że ma on w szczególności funkcję następnika z obiektem początkowym i że system ten spełnia zasadę indukcji. Przykładem tej wersji strukturalizmu jest teoria struktur Shapiro.

KORZYŚCI PŁYNĄCE Z PRZYJĘCIA POGLĄDÓW STRUKTURALISTYCZNYCH

Jak już wspominaliśmy, wszystkie koncepcje strukturalistyczne tworzone są jako alternatywa dla tradycyjnego platonizmu, gdyż ten ostatni boryka się z wieloma problemami natury ontologicznej i epistemologicznej. Rodzi się zatem pytanie, czy strukturalizm jest rzeczywistą alternatywą dla platonizmu i jakie korzyści niesie ze sobą przyjęcie poglądów strukturalistycznych w filozofii matematyki. Rozważmy niektóre problemy, jakie napotykają klasyczne koncepcje w filozofii matematyki, a z jakimi dobrze radzi sobie strukturalizm.

Czym *nie są* obiekty matematyki?

Strukturaliści głoszą, że matematyka bada struktury, a nie wyizolowane obiekty i że przedmioty matematyki są jedynie pozycjami w strukturach pozbawionymi indywidualnych cech. Czy tak rozumiany strukturalizm rozwiązuje jeden z problemów traktowanych poważnie przynajmniej przez niektórych platoników i ich oponentów, a mianowicie problem: czym są obiekty matematyki?

W historii matematyki spotykamy wiele różnych odpowiedzi na to ostatnie pytanie. Gottlob Frege twierdził, że liczby są obiektami. Bazował on częściowo na gramatyce słów wyrażających liczby, np. na ich podobieństwie do rzeczowników. Podał wyczerpującą charakterystykę użycia takich słów w poszczególnych kontekstach np. *„ilość x-ów wynosi y"*. Frege zauważył jednak, że takie podejście nie jest równoważne traktowaniu liczb jako obiektów, potrzebne jest bowiem jeszcze kryterium rozstrzygania, czy jakaś liczba, np. 2, jest taka sama jak jakiś inny obiekt, powiedzmy

Juliusz Cezar, czy też inna.[3] Problem ten może być rozumiany w terminach Quine'a: „Nie ma obiektu bez identyczności". Potrzebujemy zatem kryteriów do „indywidualizowania" (rozróżniania) wszystkich rzeczy znajdujących się w naszej ontologii. Frege próbował rozwiązać ten problem, ale jego system okazał się sprzeczny.

Możemy szukać ontologii matematyki w teorii zbiorów. Istnieje kilka sposobów redukcji arytmetyki do teorii zbiorów, a rozstrzygnięcie, który z nich jest najwłaściwszy, nie jest możliwe. Zgodnie z jedną z redukcji, pochodzącą od von Neumanna, poprawne jest, na przykład, stwierdzenie, że 1 jest elementem 4. Zgodnie z inną, pochodzącą od Zermela, 1 nie jest elementem 4 (1 nie należy do 4).[4] Zatem pozostajemy bez odpowiedzi na pytanie „czy 1 rzeczywiście jest elementem 4, czy też nie?". Czym zatem są liczby naturalne? Liczbami porządkowymi von Neumanna, liczbami Zermela czy może jeszcze innymi zbiorami? Można uważać, podobnie jak Shapiro, że jest to argument na rzecz stwierdzenia, że liczby nie są obiektami, ale takie stwierdzenie pociąga za sobą konieczność odpowiedzi na pytanie, czym *jest* obiekt.

Strukturalizm świetnie tłumaczy, dlaczego pytania w rodzaju „Czy Juliusz Cezar = 2? " lub „Czy 1 należy do 4?" nie powinny być w ogóle stawiane. Filozofia matematyki nie musi bowiem odpowiadać na takie pytania, lecz powinna pokazywać, dlaczego takie pytania są niewłaściwe i niezrozumiałe. Takie podejście nie ignoruje pytań omawianego rodzaju, lecz tylko pokazuje, dlaczego nie jest konieczne szukanie odpowiedzi na nie.

Zgodnie z duchem strukturalizmu nie ma sensu badanie identyczności pomiędzy miejscem w strukturze liczb naturalnych a jakimś innym obiektem (np. Juliuszem Cezarem). Równość obiektów możemy bowiem rozważać tylko w obrębie jednej struktury. Juliusz Cezar nie jest miejscem w strukturze liczb naturalnych i dlatego porównywanie go z jakimkolwiek miejscem w tej strukturze nie jest dopuszczalne. Matematyka powinna rozważać równość liczb wyrażoną w *języku arytmetyki* (np. 7 jest największą liczbą pierwszą, która jest mniejsza niż 10). Podobnie pytania dotyczące relacji numerycznych pomiędzy liczbami (np. czy $1<4$) to pytania „wewnętrzne" dla struktury liczb naturalnych. Możemy zadawać pytania dotyczące powiązań pomiędzy pozycjami w strukturze, ale nie pomiędzy tymi pozycjami a obiektami spoza struktury. Zatem pytanie o równość 2 i Juliusza Cezara nie ma odpowiedzi, ponieważ nie jest ona potrzebna. Błędem kategorii jest pytanie, czy 1 jest elementem 4, pomimo że

---

[3] Problem równości obiektów pojawia się w literaturze jako problem Cezara.

[4] John von Neumanna (1903—1957) definiował każdą liczbę naturalną n jako zbiór liczb mniejszych od n. Tak więc 0 jest zbiorem pustym, 1 to zbiór $\{\varnothing\}$, 2 jest zbiorem $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$, 3 to zbiór $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$ itd. W tym systemie zbiór reprezentujący liczbę n ma dokładnie n elementów.

Inny sposób redukcji liczb naturalnych do obiektów teorii mnogości zaproponował Ernst Zermelo (1871—1953). Przyjmował on, że liczba 0 jest zbiorem pustym i dla każdej liczby n, następnik tej liczby jest singletonem złożonym z n. Tak więc 1 jest zbiorem $\{\varnothing\}$, 2 jest zbiorem $\{\{\varnothing\}\}$, 3 jest zbiorem $\{\{\{\varnothing\}\}\}$, itd. Zatem każdy zbiór reprezentujący liczbę różną od 0 złożony jest z dokładnie jednego elementu.

1 i 4 to miejsca tej samej struktury, pytanie to bowiem nie jest sformułowane w języku arytmetyki, lecz w języku teorii mnogości. Podobnym błędem byłoby pytanie, czy 1 jest odważniejsze lub zabawniejsze niż 4.

Jak wynika z powyższych rozważań, podejście strukturalistyczne do matematyki pozwala uniknąć problemów związanych z określeniem równości pomiędzy obiektami, czyli rozwiązuje problem Cezara. Nie jest to jednak jedyny problem, którego pozwala uniknąć strukturalizm.

Wieloredukcja

Tradycyjny platonizm matematyczny z jednej strony zakłada, że matematyka bada konkretne, istniejące realnie obiekty, a z drugiej strony musi uznać fakt, że żadna teoria matematyczna nie potrafi wyznaczyć obiektów, które bada, w sposób bardziej jednoznaczny niż z dokładnością do izomorfizmu. Problem ten pojawia się, między innymi, w kontekście teoriomnogościowego podejścia do liczb naturalnych i jest nazywany problemem wieloredukcji. Ponieważ możliwe są różne redukcje liczb naturalnych do zbiorów (por. wyżej), to muszą istnieć kryteria wyboru jednej z nich, tzn. określenia, które zbiory reprezentują „prawdziwe" liczby naturalne.

Strukturalizm matematyczny pozwala rozwiązać ten problem (a właściwie uniknąć go) w ten sposób, że nie identyfikuje on żadnego konkretnego systemu obiektów z liczbami naturalnymi, twierdzi jedynie, że rolę liczb naturalnych może pełnić każdy ciąg, który spełnia określone własności, a ponieważ nie jest konieczna identyfikacja liczb z konkretnymi zbiorami, to nie musimy też rozważać kryteriów wyboru takiej identyfikacji. Strukturaliści twierdzą, że wszystkie możliwe systemy zbiorów, do których redukuje się liczby naturalne są, podobnie jak ciąg liczebników, tylko przykładami struktury liczb naturalnych, natomiast arytmetyka jest nauką o tej strukturze, a więc zarówno o liczbach rozumianych jako ciąg liczebników, jak i o liczbach rozumianych jako ciąg zbiorów. Zatem strukturalizm dobrze radzi sobie z problemem wieloredukcji.

Epistemologia

Traktując obiekty matematyczne w sposób platoński, stajemy również przed problemem natury epistemologicznej. Ponieważ platońskie obiekty matematyczne nie istnieją w czasie i przestrzeni, to można podać w wątpliwość naszą nabytą wiedzę o nich oraz to, czy metody, które stosujemy w ich badaniu, są niezawodne.

Jednym z głównych problemów epistemologicznych stojących przed realizmem matematycznym jest wytłumaczenie, jak metody matematyki, takie jak obliczanie i dowodzenie, mogą generować informacje o rzeczywistości matematycznej. Na to pytanie próbuje odpowiedzieć Resnik, twierdząc, że matematycy nabywają wiedzę o rzeczywistości matematycznej przez odwołanie do podobieństw strukturalnych pomiędzy różnymi abstrakcyjnymi strukturami matematycznymi a fizycznymi obliczeniami i diagramami.[5]

Strukturaliści traktują obiekty matematyczne, takie jak liczby, zbiory, funkcje czy punkty, jako byty nieposiadające wewnętrznej struktury. Twierdzą oni, że nie możemy posiadać wiedzy matematycznej o izolowanych obiektach, lecz możemy poznawać tylko struktury lub ich części. Powstaje zatem pytanie, w jaki sposób zdobywamy ten rodzaj wiedzy.

Jak wspominaliśmy powyżej, najczęstszą odpowiedzią jest stwierdzenie, że struktury poznajemy w procesie abstrakcji z ich konkretnych przykładów. Jednak struktury nieskończone nie mają swoich konkretnych przykładów, a zatem metody ich poznawania muszą być inne. Na przykład, strukturę liczb naturalnych możemy rozpoznać, rozpoczynając od obserwacji coraz dłuższych skończonych ciągów znaków, co doprowadza nas w końcu do rozważania możliwości ciągów, które nie mają końca (w jednym kierunku). Z punktu widzenia strukturalizmu nie ma bowiem większych różnic pomiędzy ciągiem takich znaków a liczbami naturalnymi.

Innym sposobem rozumienia i omawiania struktur jest ich bezpośredni opis przez podanie definicji. Definicje takie, nazywane definicjami uwikłanymi, charakteryzują bowiem pewną liczbę obiektów w terminach ich wzajemnych relacji.

Kiedy już rozumiemy jedną strukturę, możemy opisywać inne struktury w jej terminach. Struktura liczb całkowitych może być rozumiana podobnie, jak struktura liczb naturalnych, tyle że nieskończona w obu kierunkach. Podobnie strukturę liczb wymiernych możemy definiować za pośrednictwem struktury liczb całkowitych itp.

W świetle powyższych rozważań uzasadnione wydaje się stwierdzenie, że strukturalizm jest atrakcyjną alternatywą dla platonizmu, w tym sensie, że rozwiązuje typowe dla tradycyjnego platonizmu problemy, zarówno natury ontologicznej, jak i epistemologicznej, nie odrzucając realizmu jako takiego.

TRUDNOŚCI ZWIĄZANE ZE STRUKTURALIZMEM MATEMATYCZNYM

Jak pokazaliśmy powyżej, przyjęcie poglądów strukturalistycznych w odniesieniu do obiektów matematyki niesie ze sobą wiele korzyści. Nie sposób jednak pominąć faktu, że strukturalizm matematyczny, w jego obecnej formie, boryka się również z wieloma problemami. Rozważmy teraz najważniejsze z nich:

Pusta prawdziwość

Zagadnienie pustej prawdziwości jest nierozerwalnie związane ze strukturalizmem eliminacyjnym, którego główną tezę można sformułować następująco: twierdzenia o pewnym rodzaju obiektów matematycznych należy traktować jako twierdze-

---

[5] Przykłady takich diagramów pokazuje Resnik [1982].

nia ogólne o strukturach określonego rodzaju i w ten sposób eliminować odwoływanie się do obiektów matematycznych badanego rodzaju.

W tej wersji strukturalizmu matematycznego zdania danej teorii nie odnoszą się do konkretnych obiektów, lecz są jedynie rodzajem generalizacji. W przypadku arytmetyki każde zdanie A wyraża własność, która odnosi się do wszystkich systemów liczb naturalnych. Możemy je zatem sprowadzić do twierdzenia w postaci warunkowej:

(*) Dla dowolnego systemu S, jeśli S jest przykładem struktury liczb naturalnych, to $A(S)$,

gdzie A jest zdaniem wyrażonym w języku arytmetyki.

Jak wiadomo implikacja jest zawsze prawdziwa, gdy jej poprzednik ma wartość logiczną zero. Jeżeli więc nie założymy niepustości poprzednika implikacji (*), to zdanie (*) będzie zawsze prawdziwe, a więc jego wartość logiczna nie będzie zależała od wartości logicznej wyjściowego zdania A. Żeby uniknąć takiej sytuacji, konieczne jest założenie o istnieniu systemu prosto nieskończonego.

Różni autorzy proponowali różne rozwiązania tego problemu. Dedekind uważał, że wyjściem z tej trudności jest dowód istnienia systemów (zbiorów) prosto nieskończonych, bo on wykluczyłby fałszywość poprzednika w powyższej implikacji. Jednakże dowód przedstawiony przez niego w paragrafie 66 *Was sind und was sollen die Zahlen?* nie jest powszechnie uznawany za poprawny dowód matematyczny.[6]

Hellman[7] proponuje natomiast przyjęcie założenia o *możliwości* istnienia systemu nieskończonego. Rozwiązanie to ma tę zaletę, że nie zakłada aktualnego istnienia nieskończoności, które to założenie jest problematyczne. Koncepcja Hellmana rodzi jednak inne problemy związane z używaniem przez niego logiki modalnej drugiego rzędu.

Można zatem stwierdzić, że proponowane rozwiązania problemu pustej prawdziwości dla strukturalizmu eliminacyjnego rodzą problemy związane albo z wykazaniem istnienia zbiorów nieskończonych, albo z zagadnieniami związanymi z logiką modalną.

Kategoryczność

Program strukturalizmu eliminacyjnego scharakteryzowaliśmy powyżej przez stwierdzenie: dowolne zdania o pewnym rodzaju obiektów matematycznych należy traktować jako stwierdzenia ogólne o *wszystkich* strukturach określonego rodzaju i w ten sposób eliminować odwoływanie się do obiektów matematycznych badanego rodzaju. Zatem przyjęcie tej wersji strukturalizmu niesie ze sobą nie tylko konieczność rozwiązania problemu pustej prawdziwości, lecz także konieczność przyjęcia założenia o kategoryczności rozważanych teorii matematycznych.

---

[6] Dokładne omówienie tej kwestii można znaleźć np. w Mc Carty [1995].

[7] Por. Hellman [1989] i Hellman [1996].

W przypadku arytmetyki, twierdzenie o kategoryczności zachodzi tylko dla arytmetyki drugiego rzędu. Arytmetyki elementarne pierwszego rzędu są niekategoryczne, mają bowiem różne, nieizomorficzne między sobą modele. Ponieważ dopiero arytmetyka drugiego rzędu jest teorią kategoryczną, więc problem kategoryczności arytmetyki można rozwiązać tylko kosztem przyjęcia logiki nieelementarnej, co z kolei rodzi nowe problemy.

W szczególności pojawia się pytanie, czy logika drugiego rzędu może być interpretowana w sposób pasujący do idei eliminowania obiektów matematycznych. Najbardziej kłopotliwą kwestią związaną z logiką drugiego rzędu jest określenie dziedziny zmiennych drugiego rzędu, tzn. zmiennych zbiorowych, które zgodnie z założeniami strukturalizmu eliminacyjnego powinny być zdefiniowane przez odwołanie do pewnej całości (zbioru), którego są one elementami. Tylko wtedy bowiem będziemy mogli wyeliminować odwołania do obiektów matematycznych przez odwołania do struktury, której obiekty te są elementami. To jednak może prowadzić do paradoksów związanych z używaniem pojęcia zbioru wszystkich zbiorów. Kategoryczność nie jest zatem kwestią, którą można uznać za rozwiązaną.

PODSUMOWANIE

Powyżej przedstawiliśmy argumenty na rzecz stwierdzenia, że strukturalizm pozwala przezwyciężyć pewne trudności związane z kierunkami klasycznymi w filozofii matematyki, w szczególności z platonizmem. Podejście strukturalistyczne wydaje się także bliższe praktyce badawczej matematyków. Matematyków interesują bowiem relacje i związki zachodzące pomiędzy obiektami, a nie natura tych obiektów.

Jednakże sam strukturalizm, niezależnie od tego, w jakiej wersji jest przyjmowany, boryka się z pewnymi problemami wypunktowanymi powyżej, których rozwiązanie nadal pozostaje kwestią otwartą. Istnieją również problemy związane z definiowaniem samego pojęcia struktury, które w sposób nierozerwalny związane jest ze strukturalizmem. Najczęściej używa się pojęcia struktury albo w sposób nieformalny, jak to przyjmują strukturaliści np. w naukach humanistycznych, a co jest niedopuszczalne w przypadku strukturalizmu matematycznego, lub też używanie pojęcia struktury jest tylko ukrytą formą używania pojęć teorii mnogości, a takie podejście, jak już wspominaliśmy, również nie jest wolne od problemów. Podsumowując, można zatem stwierdzić, parafrazując Parsonsa, że strukturalizm w obecnym stadium rozwoju „nie jest całą prawdą o obiektach matematyki".

BIBLIOGRAFIA

I. Bondecka-Krzykowska, *Strukturalizm w filozofii matematyki* (w przygotowaniu).
The Cambridge Dictionary of Philosophy, second edition, Cambridge University Press, Cambridge 1999.

A. Grzegorczyk, *Zarys arytmetyki teoretycznej*, PWN, Warszawa 1971.

G. Hellman, *Mathematics without Numbers. Towards a Modal-Structural Interpretation*, Clarendon Press, Oxford 1989.

G. Hellman, 1996, *Structuralism without structures*, Philosophia Mathematica (3) Vol. 4, s. 100—123.

D. C. Mc Carty, *The mysteries of Richard Dedekind*, [w:] *Essays on the Development of Foundations of Mathematics*, red. J. Hintikka, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1995, s. 53—96.

Ch. Parsons, *Mathematics in Philosophy. Selected Essays*, Cornell University Press, Ithaca, New York 1983.

Ch. Parsons, *The structuralist view of mathematical objects*, Synthese 84, 1990, s. 303—346.

M. D. Resnik, *Mathematical knowledge and pattern cognition*, Canadian Journal of Philosophy 5, 1975, s. 25—39.

M. D. Resnik, *Mathematics as a science of patterns: ontology and reference*, Noûs 15, 1981, s. 529—550.

M. D. Resnik, *Mathematics as a science of patterns: epistemology*, Noûs 16, 1982, s. 95—105.

M. D. Resnik, *Mathematics as a Science of Patterns*, Clarendon Press, Oxford 1997.

S. Shapiro, *Structure and ontology*, Philosophical Topics, vol. XVII, no. 2, 1989, s. 145—170.

S. Shapiro, *Philosophy of Mathematics. Structure and Ontology*, Oxford University Press, New York 1997.

S. Shapiro, *Thinking About Mathematics. The Philosophy of Mathematics*, Oxford University Press, Oxford 2000.