Filozofia Nauki
Rok X, 2002, Nr 2(38)

Janusz Czelakowski

Uwagi o teorii mnogości
(na marginesie dyskusji o książce prof. Ryszarda Wójcickiego)

Książka zaczyna się od przystępnego, prowadzonego w duchu Cantorowskim, wykładu elementów teorii mnogości (w skrócie: TM). Zgrabne jest tu wprowadzenie aksjomatu ekstensjonalności, istnienia zbioru pustego, istnienia pewnych zbiorów jednostkowych. Jest tu też uwaga o zbiorach, które można wyprodukować ze zbioru pustego (co może być zresztą wstępem do omówienia w przyszłości von Neumannowskiego uniwersum zbiorów). Wykład ten odpowiada temu, co żartobliwie określa się przedszkolną teorią mnogości, gdzie mówi się o zbiorach piłek, klocków, jabłek itp. Ta część wykładu jest oczywiście w pełni zgodna zarówno z oczekiwaniami, jak i wiedzą matematyczną «zwykłego» użytkownika teorii mnogości, kształconego w szkołach i uczelniach, na których są wykładane elementy matematyki. Niewątpliwie w taki sposób, jak czyni to Autor, postrzegamy zbiory, zwłaszcza zbiory skończone, tj. jako wyodrębnione myślowo, policzalne zestawy rozróżnialnych jednostek. (Nieco inną perspektywę teorii mnogości wyznaczają rozważania prowadzone nad własnościami przedmiotów, gdzie — jak się sądzi — właściwym pojęciem pierwotnym jest pojęcie *klasy*, a nie zbioru.)

Potrzebne jest w tym miejscu pewne ostrzeżenie. W wielu, powszechnie przyjętych aksjomatycznych TM, np. w teorii ZF (Zermelo—Fraenkela), wymienione wyżej zbiory w ogóle nie są zbiorami. W szczególności np. nie można mówić o zbiorze państw sąsiadujących z Polską. Dlaczego tak jest?

Otóż zazwyczaj jeszcze przed przyjęciem takiej czy innej aksjomatyzacji przyjmuje się (*explicite* bądź *implicite*) pewne formy tzw. Zasady Czystości, określające relacje miedzy bytami, które nazywać będziemy zbiorami, a innymi bytami. W wersji skrajnej zasada ta mówi, że każdy byt jest zbiorem. W łagodniejszych sformułowaniach mówi się np. o istnieniu rozmaitych pra-elementów, tj. bytów, które same nie są zbiorami, ale z których pewne zbiory można tworzyć. Często przyjmowana jest Zasada Czystości w wersjach umiarkowanych, np.:

Każdy element zbioru jest zbiorem.

Zasada ta (w wersji powyższej) jest przyjmowana (choć nie dla wszystkich jest to jasne) jako warunek wstępny, umożliwiający standardową formalizację języka TM z epsilonem „$\in$" i relacją równości „=". Jeżeli bowiem zgodzimy się na to, by pisać aksjomaty TM w tym języku, zmuszeni jesteśmy akceptować Zasadę Czystości w powyższej wersji. W języku tym bowiem zmienne indywiduowe przebiegają tylko zbiory. Pisząc zaś, że $y \in x$, przyjmujemy zatem, że zmienne x i y reprezentują zbiory. W szczególności y, reprezentując dowolny element zbioru x, też jest zbiorem. Zasada Czystości ma zatem wpływ nie tyle na wybór i postać aksjomatów TM, ile na sam wybór języka TM. Określa ona to, co można nazwać perspektywą językową TM, określa wybór narzędzi językowych, w tym reguł składni języka, w którym opisujemy zbiory.

Zasada Czystości w powyższej wersji i, w konsekwencji, przyjęcie określonego języka TM, wykluczają „przedszkolną", naiwno-Cantorowską TM. (Odnosi się to oczywiście do TM uprawianej przez matematyków.) Nie można bowiem wtedy mówić, że

> jeżeli rozpatrywanym zbiorem jest zbiór jabłek w koszyku, to elementy tego zbioru, tj. poszczególne jabłka, same są zbiorami,

bo nie ma przekonywujących dowodów, by jabłko było zbiorem (w sensie dystrybutywnym). Co więcej, a nawet gorzej, matematycy uważają za interesujące z matematycznego punktu widzenia jedynie tzw. zbiory regularne, czemu dają wyraz przyjmując tzw. Aksjomat Regularności. (Pogląd ten jest np. *explicite* wyłożony w znanej książce C. C. Changa i H. J. Keislera *Model theory*, North-Holland and American Elseviev, Amsterdam—London—New York 1973) W jednej z wersji aksjomat ten orzeka, że zbiorem jest jedynie to, co należy do znanej kumulatywnej hierarchii zbiorów von Neumanna. Jej podstawą jest zbiór pusty, następnikiem danego szczebla hierarchii jest zbiór wszystkich podzbiorów zbioru tworzącego ten szczebel. W miejscach granicznych sumuje się wcześniej wyprodukowane zbiory.

W pewnych «miękkich» ujęciach TM, np. w znanej książce Kuratowskiego i Mostowskiego, Aksjomat Regularności nie jest przyjmowany. Autorzy ci również nie przyjmują (nawet *implicite*) Zasady Czystości w powyższym ujęciu. Pierwotne jest tam pojęcie przedmiotu. Z przedmiotów można tworzyć zbiory. A zatem elementy zbioru same nie muszą być zbiorami. Autorzy ci, jak sądzę, mają świadomość, że zbyt rygorystyczne wtłaczanie TM w czysty, wysterylizowany język z epsilonem $\in$ i równością wyklucza z pola widzenia agregaty, które jesteśmy skłonni uważać za zbiory, jak np. kolekcje krzeseł w pokoju, gruszek na wierzbie, czy klocków w pudełku.

Krótko mówiąc — powszechnie obecnie stosowane formalizmy teoriomnogościowe są zbyt rygorystyczne, by mogły objąć niektóre agregaty przedmiotów, ważne z punku widzenia nauk empirycznych, społecznych, czy dydaktyki matematyki. Powstaje oczywiście kwestia, czy wspomniane agregaty, np. pewne zbiorowości ludzkie, żyjące w określonym miejscu i czasie, można reprezentować w terminach zbiorów (w sensie dystrybutywnym) i na czym miałaby polegać taka reprezentacja. Już, na przykład, próba określenia «zbioru» wszystkich ludzi jacy kiedykolwiek żyli na Ziemi ukazuje nam skalę i rodzaj trudności na jakie tu napotykamy. Widać tu od razu, że z teorio-ewolucyjnego punktu widzenia powyższe zagadnienie wydaje się być beznadziejne trudne, a zapewne i źle postawione — mówiąc skrótowo, nie wiadomo, kiedy, gdzie i w którym pokoleniu małpa przestała być małpą i stała się człowiekiem. Z punktu widzenia np. ontologii chrześcijańskiej problem ten ma proste i czytelne, pozytywne rozstrzygnięcie — ludzie pojawili się z chwilą stworzenia Adama i Ewy.

Z drugiej strony — naiwne ujęcie TM może sugerować istnienie jakiegoś absolutnego pojęcia zbioru, na wzór pojęcia liczby naturalnej, dobrze i jednakowo rozumianego przez wszystkich użytkowników języków, w których pojawia się termin „zbiór". Jest to stanowisko bliskie Gödla, który jako platonik wierzył, że dopracujemy się kiedyś takiego absolutnego pojęcia zbioru. Teraz nie ma jednak przesłanek, które pozwoliłyby nam wierzyć w absolutność pojęcia zbioru. Jest tyle znaczeń terminu zbiór, ile jest rozmaitych teorii mnogości. A są one, jak wiemy, często wzajemnie sprzeczne. Np. teoria zbiorów konstruowalnych jest (relatywnie) sprzeczna z TM dopuszczającą Aksjomat Istnienia Liczb Mierzalnych. Naiwna wiara, że dobrze rozumiemy pojęcie zbioru, załamuje się w konfrontacji z nieskończonością, gdy dopuszczamy istnienie wielkich zbiorów. Dodajmy np. że istnieje kilka, i to nierównoważnych, teorii liczb porządkowych i kardynalnych. W wykładzie TM w książce Kuratowskiego i Mostowskiego potrzebny jest dodatkowy Aksjomat Typów Relacyjnych. Pozwala on zdefiniować w stylu Fregego liczby porządkowe i kardynalne jako typy pewnych relacji równoważności. (Typy są pewnymi bytami pozamnogościowymi.) W ujęciu von Neumanna aksjomat ten nie jest potrzebny — określa się tu liczby porządkowe jako ściśle dobrze uporządkowane przez epsilon $\in$ zbiory przechodnie, a liczby kardynalne — jako początkowe liczby porządkowe, tj. takie, które nie dają się ponumerować elementami mniejszej liczby porządkowej. Przypisanie dowolnemu zbiorowi jego mocy wymaga jednak, w tym ujęciu, przyjęcia bardzo silnego aksjomatu, jakim jest Aksjomat Wyboru. W ujęciu Scotta, do zdefiniowania liczby kardynalnej wystarcza Aksjomat Regularności. Liczby kardynalne nie są tu już liczbami porządkowymi lecz zbiorami o bardziej złożonej strukturze.

Wspomniana wyżej TM uprawiana przez Kuratowskiego i Mostowskiego jest, jak zaznaczyłem, teorią «miękką». «Miękkość» danej TM nie polega na przyjęciu założeń, że istnieją różne byty, przy czym niektóre z nich są zbiorami. Idzie tu o to, że już sam akt wyboru języka, w którym sformułowana jest TM, określa do pewnego stopnia znaczenie terminu „zbiór". Nie mam tu na myśli kształtu takich, czy innych aksjomatów TM, lecz wybór symboli pozalogicznych języka i reguł składni. Już na tym czysto syntaktycznym poziomie dokonuje się rozstrzygnięć o konsekwencjach, by tak rzec, ontologicznych, tj. wpływających na rozumienie pojęcia zbioru.

Kuratowski i Mostowski piszą o przedmiotach, które same nie muszą być zbiorami. Można je myślowo łączyć, układać w pewne całości, abstrahując od natury tych przedmiotów. Całości te są już zbiorami w sensie dystrybutywnym. Co dalej można z nimi robić — określają to aksjomaty TM. Przyjmuje się przy tym jedynie dwa aksjomaty egzystencjalne — istnienie zbioru pustego i aksjomat nieskończoności.

Do czego zmierzają moje uwagi? Na podstawie lektury początkowych rozdziałów można sobie wyrobić opinię, że jest to książka, która w przystępnym, prostym języku, bez zawiesistego sosu formalnego, opowiada w jasny sposób o trudnych i zawiłych problemach współczesnej logiki, jak teoria języka i jego funkcji, teoria znaczenia, wynikania, prawdy itp. Dotyczy to również, w skromnym zakresie, TM. Czytelnik powinien mieć tu świadomość, że — choć wyda mu się, że dobrze rozumie zasady TM — sprawy są dalece bardziej złożone niż mógłby sądzić po lekturze pierwszych rozdziałów. Zapewne w bardziej zaawansowanej wersji książki, którą Autor opracowuje, czytelnik dowie się więcej o trudnościach z pojmowaniem zbiorów i o tym, że terminu „zbiór" nie da się, w świetle dostępnej wiedzy, wcisnąć w gorset jedynie słusznej interpretacji.

Sens powyższych uwag jest taki — nasze rozumienie zbioru kształtuje się już na poziomie języka, służącego do opisu zbiorów, tj. zależy ono nie tylko od aksjomatów TM, ale w dużym stopniu jest zależne od wyboru symboli pozalogicznych języka i reguł składni języka, w którym mówimy o zbiorach. Nazywam to perspektywą językową TM. Pojmowanie zbioru jest też kształtowane przez określoną perspektywę poznawczą, tj. przez takie czynniki, jak uznawane wartości, światopogląd itp. Powyższy przykład dotyczący «zbioru» ludzi pokazuje, że perspektywa poznawcza gra tu zapewne jakąś rolę. Omawiane wyżej zasady czystości dla zbiorów są zdeterminowane przez powyższe perspektywy.