Filozofia Nauki
Rok IX, 2001, Nr 4(36)

POLEMIKI

Cezary Cieśliński

Arytmetyka i intensjonalność

Twierdzenia Gödla o istotnej niezupełności teorii zawierających arytmetykę Peano już od dawna budzą zainteresowanie filozofów. Podważyły one popularną swego czasu tezę o identyczności prawdy matematycznej z dowodliwością w pewnym systemie formalnym i zmusiły do ponownego przemyślenia pytania o naturę prawdy w matematyce. Niektórzy filozofowie powoływali się na wspomniane twierdzenia, by dowodzić zaskakujących tez o niemechaniczności ludzkiego umysłu.

Wokół twierdzeń Gödla namnożyło się również wiele nieporozumień. Celem niniejszej pracy jest wyjaśnienie kilku z nich. W części I skomentujemy artykuł Wojciecha Krysztofiaka „Twierdzenia Gödla, możliwe światy i intensjonalność". Wspomniany artykuł, zawierający liczne, rzeczowe błędy, został opublikowany w zbiorze esejów upamiętniającym sześćdziesiąte urodziny prof. Jana Woleńskiego. Nie jest to fakt bez znaczenia: książka ta z pewnością znajdzie wielu czytelników (między innymi wśród studentów), a niektórzy z nich mogą uznać artykuł Krysztofiaka za cenne źródło informacji o twierdzeniach Gödla i niezupełności arytmetyki. Należy wyprowadzić ich z błędu.

W części II spróbujemy wyjaśnić, w jakim sensie logicy mówią o zjawisku intensjonalności w arytmetyce.

I

Zacznijmy od podstaw. W roku 1930 Kurt Gödel udowodnił dwa twierdzenia, charakteryzujące własności teorii zawierających arytmetykę Peano (PA)[1]. Na mocy

---

[1] Zob. [Gödel 1931], a także [Smorynski 1977]. Ta ostatnia praca to znakomity przegląd tych oraz innych, później uzyskanych, metamatematycznych wyników.

pierwszego z nich, każda taka teoria jest istotnie niezupełna. Drugie twierdzenie głosi, że środkami takiej teorii nie da się udowodnić jej niesprzeczności. Oto dokładniejsze sformułowania:

Pierwsze twierdzenie Gödla[2]

Niech T będzie teorią aksjomatyzowalną, niesprzeczną, zawierającą PA, w języku PA. Wówczas istnieje zdanie φ takie że:

$$T \nvdash \varphi$$
$$T \nvdash \neg\varphi$$

Drugie twierdzenie Gödla

$$T \nvdash \mathrm{Con}_T$$

gdzie T jest teorią spełniającą warunki z pierwszego twierdzenia, a „Con_T" to zdanie arytmetyczne, które (przy naturalnej interpretacji) mówi, że T jest niesprzeczna.

Schemat dowodu pierwszego twierdzenia o niezupełności:

(1) Pokazujemy, że żadna aksjomatyzowalna, nierozstrzygalna teoria nie jest zupełna.

(2) Dowodzimy, że każda aksjomatyzowalna, niesprzeczna teoria zawierająca PA jest nierozstrzygalna.

Następnie uzyskujemy pierwsze twierdzenie o niezupełności jako prosty wniosek z (1) i (2).

Dowód (1) polega na zauważeniu, że gdyby teoria T była zupełna (tj. dla każdego φ, $T \vdash \varphi$ lub $T \vdash \neg\varphi$), to byłaby rozstrzygalna. Ustawiamy po prostu wszystkie dowody w T w rekurencyjny ciąg i biorąc dowolną φ, sprawdzamy czy kolejne wyrazy tego ciągu stanowią dowody φ, czy negacji φ. Skoro T jest zupełna, prędzej czy później uzyskamy pożądany wynik.

W dowodzie (2) korzystamy z tzw. twierdzenia o reprezentowalności. Głosi ono co następuje.

Twierdzenie o reprezentowalności. Wszystkie rekurencyjne zbiory liczb naturalnych są reprezentowalne w arytmetyce Peano. Inaczej mówiąc, dla dowolnego rekurencyjnego zbioru X istnieje formuła $\varphi(v)$ z jedną zmienną wolną, taka że

$$\forall n\, [n \in X \equiv \mathrm{PA} \vdash \varphi(\overline{n})]$$

---

[2] Ściśle biorąc, twierdzenie w tej postaci udowodnił Rosser. Sam Gödel posłużył się dodatkowym założeniem ω-niesprzeczności T.

$$\forall n\, [n \notin X \equiv \mathrm{PA} \vdash \neg\, \varphi(\overline{n})]$$

Przyjrzyjmy się teraz dowodowi (2).

Niech T będzie teorią aksjomatyzowalną, niesprzeczną, zawierajacą PA. Dodatkowo załóżmy, że T jest rozstrzygalna.

Wprowadzamy definicję zbioru H:

$n \in H$ wtw gdy n jest kodem formuły $\varphi(v)$ z jedną zmienną wolną i $T \nvdash \varphi(\overline{n})$.

Zauważamy, że przy założeniu rozstrzygalności T, H okazuje się zbiorem rozstrzygalnym. Weźmy bowiem dowolną liczbę n. Najpierw sprawdzamy, czy jest to kod jakiejś formuły $\varphi(v)$ z jedną zmienną wolną (to jest wykonalne na mocy własności kodowania). Później wystarczy sprawdzić, czy $T \nvdash \varphi(\overline{n})$.

Skoro H jest rozstrzygalny, to na mocy twierdzenia o reprezentowalności istnieje taka ψ, że

$$\forall n\, [n \in H \equiv T \vdash \psi(\overline{n})]$$

Niech teraz k będzie numerem gödlowskim formuły $\psi(v)$. Otrzymujemy:

$$k \in H \equiv T \vdash \psi(\overline{k})$$

ale z definicji H dostajemy:

$$k \in H \equiv T \nvdash \psi(\overline{k}),$$

bo k jest kodem ψ.

Zatem $T \vdash \psi(\overline{k}) \equiv T \nvdash \psi(\overline{k})$. Uzyskaliśmy sprzeczność, co kończy dowód.

Wspomniana już praca Krysztofiaka zaczyna się od przedstawienia naszkicowanego powyżej dowodu; niestety, wygląda na to, że autor sam nie rozumie, czego i w jaki sposób dowodzi. Oto jego komentarz:

> Kluczowym składnikiem dowodu [...] jest konstrukcja rozstrzygalnego zbioru H. Zbiór ten okazuje się nie być reprezentowalny w arytmetyce liczb naturalnych. Z drugiej jednak strony, każdy zbiór rozstrzygalny jest reprezentowalny w arytmetyce liczb naturalnych, o ile arytmetyka jest rozstrzygalna. Konstrukcja zbioru H umożliwia więc wyciągnięcie wniosku o nierozstrzygalności arytmetyki.[3]

Cytowany fragment zdradza dogłębne niezrozumienie zaprezentowanego dowodu. Krysztofiak w niewłaściwy sposób przedstawia jego strukturę. Zgodnie z jego komentarzem chodzi o to, że:

(a) H jest rozstrzygalny

(b) Jeśli T jest rozstrzygalna i zawiera arytmetykę, to każdy rozstrzygalny zbiór jest reprezentowalny w T

(c) H nie jest reprezentowalny w T, a T zawiera arytmetykę

Zatem T nie jest rozstrzygalna.

W rzeczywistości:

(1) Zbiór H nie jest rozstrzygalny. Jego rozstrzygalność jest tylko wnioskiem z założenia dowodu nie wprost o rozstrzygalności arytmetyki. Przedstawione wcze-

[3] Zob. [Krysztofiak 2000], s. 68.

śniej rozumowanie stanowi zatem raczej dowód *nierozstrzygalności* zbioru H (również dalej w omawianym artykule Krysztofiak uparcie twierdzi, że zbiór H jest rozstrzygalny, wbrew dowodowi, który sam wcześniej podał).

(2) Założenie o rozstrzygalności T występujące w warunku (*b*) jest zupełnie nieistotne – twierdzenie o reprezentowalności go nie wymaga. Co więcej, celem dowodu jest przecież pokazanie, że założenie to jest fałszywe.

Naszkicowany wyżej dowód twierdzenia o nierozstrzygalności T ma następującą strukturę:

(a) T jest rozstrzygalna (założenie dowodu nie wprost)

(b) H jest rozstrzygalny (wniosek z założenia)

(c) H jest reprezentowany w T przez formułę ψ (wniosek z (*b*) i twierdzenia o reprezentowalności)

(d) H nie jest reprezentowany w T przez ψ. Sprzeczność.

Cóż jeszcze zdaniem Krysztofiaka możemy powiedzieć o zbiorze H? Zauważa on słusznie, że zawartość wspomnianego zbioru zależy od przyjętej metody kodowania. Zaraz potem wygłasza jednak zadziwiającą tezę: technik numeracji formuł jest nieprzeliczalnie wiele (!), a zatem istnieje nieprzeliczalnie wiele zbiorów „typu H".[4] Jest to zaiste frapujące twierdzenie, tym bardziej, że dowód jego negacji możemy odnaleźć w podręcznikach logiki.[5] Wspomniane techniki muszą mieć przecież rekurencyjny charakter, zbiór funkcji rekurencyjnych jest zaś przeliczalny.

Liczby naturalne uznaje Krysztofiak za obiekty epistemicznie niezupełne. Oto jego definicja tego pojęcia:

$$x \in \text{Ep.Nzpl.}_T \equiv \exists\varphi[T \nvdash \varphi(v/x) \wedge T \nvdash \neg\varphi(v/x)]$$

czyli: x jest przedmiotem epistemicznie niezupełnym (na gruncie teorii T) gdy dla pewnego warunku φ, T nie rozstrzyga, czy x spełnia ten warunek. Krysztofiak próbuje wykazać, że każda liczba naturalna jest obiektem epistemicznie niezupełnym w scharakteryzowanym sensie. Jego «dowód» polega na tym, że dla dowolnej liczby naturalnej n i formuły φ znajdziemy metodę kodowania, przy której n jest numerem gödlowskim φ; będzie tak zatem również dla formuły ψ reprezentującej zbiór H, a wówczas $T \nvdash \varphi(\overline{n})$ i $T \nvdash \neg\varphi(\overline{n})$. Jest to kompletne nieporozumienie: zostało przecież wykazane, że nie istnieje formuła ψ reprezentująca zbiór H.

Zauważmy nawiasem, że dowodzone twierdzenie (o „epistemicznej niezupełności" wszystkich liczb naturalnych) jest prawdziwe i posiada banalny dowód. Twierdzenie to (podaję tu wersję mocniejszą od sformułowania Krysztofiaka) głosi co następuje:

Twierdzenie. Istnieje formuła $\varphi(v)$, taka że:

$$\forall n\, [T \nvdash \varphi(\overline{n}) \wedge T \nvdash \neg\varphi(\overline{n})]$$

Dowód.

Niech ψ będzie zdaniem, takim że:

---

[4] *Ibidem*, s. 68.

[5] Zob. np. [Cutland 1980], s. 78.

$$T \nvdash \psi$$
$$T \nvdash \neg\psi$$

(istnienie takiego zdania wynika z twierdzeń Gödla-Rossera).
Niech $\varphi(v) := \ulcorner\psi \wedge v = v\urcorner$.
Dalej zauważamy, że dla dowolnego n

$$T \nvdash \varphi(\bar{n})$$

bo w przeciwnym razie $T \vdash \psi$, oraz:

$$T \nvdash \neg\varphi(\bar{n})$$

bo w przeciwnym razie $T \vdash \neg\psi$, skoro równość „$n = n$" wynika z T.

Zauważmy, że istnienie rozmaitych sposobów kodowania jest tu zupełnie nieistotne. Wystarczy jeden.

Twierdzenie jest zatem prawdziwe, cóż ciekawego jednak z tego wynika? Tu dochodzimy do sedna sprawy. Zdaniem Krysztofiaka, uzyskujemy wniosek o intencjonalnym i intensjonalnym charakterze arytmetyki. Przyjrzyjmy się temu bliżej.

(*a*) *Intencjonalność*. Za Ingardenem Krysztofiak określa przedmioty czysto intencjonalne jako „te, które posiadają tzw. miejsca niedookreślenia; są to takie przedmioty, o których nie można powiedzieć *zgodnie z prawdą*, że posiadają pewną własność lub jej nie posiadają. Obiekty epistemicznie niezupełne byłyby więc obiektami czysto intencjonalnymi w sensie Ingardena" (moja kursywa — C.C.). I dalej: „w procedurze dowodowej twierdzenia o niepełności arytmetyki liczb naturalnych, liczbom naturalnym nadaje się [...] status bytów czysto intencjonalnych".[6]

Otóż żadnego takiego statusu procedura dowodowa im nie nadaje. Gdyby ktoś chciał wykazać, że liczby naturalne są przedmiotami czysto intencjonalnymi w scharakteryzowanym sensie, to powinien udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n istnieje formuła φ taka, że ani $\varphi(\bar{n})$, ani $\neg\varphi(\bar{n})$ nie jest *prawdziwa* (a nie dowodliwa). Taka teza jest zaś jawnie fałszywa, przynajmniej jeśli przez „prawdziwość" rozumiemy „prawdziwość w standardowym modelu arytmetyki".

(*b*) *Intensjonalność*. Krysztofiak twierdzi, że „język arytmetyki jest językiem ekstensjonalnym, ale „metajęzyk użyty w procedurze dowodowej [twierdzenia Gödla] musi mieć charakter intensjonalny".[7] Oto zasada ekstensjonalności w wersji Krysztofiaka:

$$\frac{\alpha \Leftrightarrow \beta}{\psi(\alpha) \equiv \psi(\alpha/\beta)}$$

Sens jest następujący: jeśli przyjęliśmy, że α jest logicznie równoważne β („$\Leftrightarrow$" to funktor zdaniotwórczy od argumentów nazwowych), to wolno nam uznać logiczną równoważność dowolnych dwóch formuł, różniących się od siebie tylko tym, że w jednej z nich nazwa wyrażenia α została zastąpiona nazwą wyrażenia β. W myśl tej zasady, powinniśmy stwierdzić, że dla dowolnych logicznie równoważnych formuł φ, ψ:

numer Gödla (φ) = numer Gödla (ψ).

---

[6] *Op. cit.*, s. 72.

[7] *Ibidem*, s. 73.

Taka teza byłaby jednak fałszywa, zatem metajęzyk arytmetyki ma intensjonalny charakter.

Tyle Krysztofiak. A oto komentarz:

(1) Metajęzyk użyty w procedurze dowodowej twierdzenia Gödla to po prostu język arytmetyki, jeśli więc ten drugi uznajemy za ekstensjonalny, to samo musimy powiedzieć o tym pierwszym.

(2) Charakterystyka kontekstów ekstensjonalnych, jaką podaje Krysztofiak, jest nadużyciem. Przy standardowym rozumieniu tego terminu, kontekst ekstensjonalny to taki kontekst, w którym *salva veritate* możemy podstawiać wyrażenia o tej samej wartości logicznej lub denotacji. Otóż zdanie o postaci „numer Gödla (φ) = n" zachowa swą wartość logiczną bez względu na to, jakiej dostępnej nam nazwy formuły φ użyjemy. Zgodnie z podejściem Krysztofiaka, dowolny, syntaktyczny opis danego zdania φ należałoby uznać za intensjonalny, nie stosowałby się on bowiem do niektórych zdań logicznie mu równoważnych (por. np. „Zdanie „2 + 2 = 4" składa się z pięciu symboli", „Zdanie „2 + 2 = 4 i 2 + 2 = 4" składa się z pięciu symboli"). Warunek Krysztofiaka nie jest tu więc spełniony, co pokazuje tylko tyle, że używa on słowa „ekstensjonalność" w bardzo nietypowym sensie.

II

Dzięki technice arytmetyzacji potrafimy wyrazić w języku arytmetyki szereg pojęć, określających własności tego języka, a także charakteryzować własności teorii formułowanych w tym języku. Cóż jednak mamy na myśli, kiedy twierdzimy, że dany predykat arytmetyczny $\varphi(v)$ wyraża pewne syntaktyczne lub semantyczne pojęcie? Rysuje się tu kilka możliwości.

(1) Predykat definiuje zbiór przedmiotów, podpadających pod to pojęcie, w standardowym modelu arytmetyki.

(2) Predykat trafnie oddaje *znaczenie* metateoretycznego pojęcia.

Otóż w niektórych kontekstach (nazwijmy je „ekstensjonalnymi") zadowalamy się predykatami spełniającymi pierwszy warunek. Takim ekstensjonalnym wynikiem jest pierwsze twierdzenie Gödla. W innych („intensjonalnych") kontekstach domagamy się spełnienia warunku 2; przykładu dostarcza nam drugie twierdzenie Gödla o niedowodliwości niesprzeczności.[8]

Ad 1. Ponownie rozważmy pierwsze twierdzenie Gödla o niezupełności arytmetyki w następującym sformułowaniu:

Twierdzenie. Niech T będzie teorią aksjomatyzowalną, prawdziwą w standardowym modelu arytmetyki ($\mathbf{N}$). Istnieje wówczas zdanie φ, takie że:

(a) $T \nvdash \varphi$

(b) $T \nvdash \neg \varphi$

---

[8] Tradycja takiego używania terminów „ekstensjonalny" i „intensjonalny" w odniesieniu do arytmetycznych kontekstów wywodzi się od Fefermana. Zob. [Feferman 1960].

Szkic dowodu

Konstruujemy formułę „$PR_T(v)$" języka arytmetyki, spełniającą warunek:

(*) $\forall\psi\,[\mathbf{N} \models PR_T(\psi) \equiv T \vdash \psi]$

Korzystamy następnie z lematu przekątniowego, na mocy którego istnieje zdanie φ, takie że:

(**) $\mathbf{N} \models \varphi \equiv \neg\, PR_T(\varphi)$

(a) Pokazujemy, że $T \nvdash \varphi$. Załóżmy bowiem, że jest inaczej, czyli: $T \vdash \varphi$. Wówczas $\mathbf{N} \models \varphi$, zatem na mocy (**) $\mathbf{N} \models \neg\, PR_T(\varphi)$, więc z (*) $T \nvdash \varphi$. Sprzeczność.

(b) Pokazujemy, że $T \nvdash \neg\,\varphi$. Załóżmy bowiem, że jest inaczej, czyli: $T \vdash \neg\,\varphi$. Wówczas $\mathbf{N} \models \neg\,\varphi$, zatem na mocy (**) $\mathbf{N} \models PR_T(\varphi)$, więc z (*) $T \vdash \varphi$. Okazuje się w rezultacie, że T jest sprzeczna, a zatem $\mathbf{N} \not\models T$. Sprzeczność z założeniem.

Zauważmy, że istnieje nieskończenie wiele formuł, spełniających warunek (*). W obecnym kontekście nie ma żadnego znaczenia, którą z nich wybierzemy. Ważne jest tylko to, że nasz wybór formuły „$PR_T(v)$" jest ekstensjonalnie poprawny, tzn. formułę tę spełniają w standardowym modelu arytmetyki wszystkie twierdzenia teorii T (ich numery gödlowskie) i nic poza nimi.

Podobnie ekstensjonalny charakter miało rozumowanie Rossera. Rozważał on formułę „$PR_T^R(v)$" („v jest dowodliwe w sensie Rossera"), zdefiniowaną w następujący sposób:

$$PR_T^R(v) \equiv \exists y\, [Prov_T(y, v) \wedge \forall z,w \leq y\, (Prov_T(z, w) \Rightarrow (v \neq \ulcorner\neg w\urcorner \wedge w \neq \ulcorner\neg v\urcorner))]$$

gdzie „$Prov_T(y, v)$" to standardowy predykat „y jest dowodem v w T". Przy założeniu niesprzeczności T, formuła ta spełnia warunek (*), choć nie oddaje treści metateoretycznego pojęcia dowodliwości. Z grubsza biorąc, formuła „$PR_T^R(v)$" mówi raczej, że v posiada taki dowód y, poniżej którego nie znajdziemy dowodu negacji v. Okazało się, że rozważana konstrukcja, w której nie respektujemy intuicyjnego sensu terminu „dowodliwość", pozwala uzyskać interesujące rezultaty: Rosser wykazał niezupełność aksjomatyzowalnej teorii T przy słabszych założeniach niż Gödel (założył mianowicie tylko jej niesprzeczność).

Ad 2. Jak już zauważyliśmy, wiele predykatów spełnia warunek (*), czyli definiuje w $\mathbf{N}$ zbiór twierdzeń T. Niech „$PR_T(v)$" będzie dowolnym takim predykatem. Wykorzystując ten predykat, zdefiniujemy zdanie Con_T^{PR}:

$Con_T^{PR} \equiv \neg\,\exists d\,[d$ jest dowodem $\ulcorner 0 \neq 0\urcorner$ w oparciu o zbiór formuł φ, takich że $PR_T(\ulcorner\varphi\urcorner)]$.

Skoro „$PR_T(\varphi)$" mówi, że φ jest twierdzeniem T, zdanie „Con_T^{PR}" wyraża niesprzeczność T.

Jak wiadomo, na mocy drugiego twierdzenia Gödla w teorii T nie da się udowodnić, że T jest niesprzeczna. Czy w związku z tym mamy prawo stwierdzić:

$$T \nvdash Con_T^{PR}\,?$$

Otóż nie. Intensjonalny charakter drugiego twierdzenia Gödla polega na tym, że jego prawdziwość zależy od wyboru formuły, definiującej zbiór twierdzeń *T*. Zilustruje to krótkie rozumowanie, pokazujące że (przy założeniu niesprzeczności *T*) pewne zdanie, które mówi, że *T* jest niesprzeczna, wynika z *T*. Definiujemy:

$$\mathrm{Pr}'_{\mathrm{T}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \equiv [(\mathrm{Pr_T}(\ulcorner\varphi\urcorner) \wedge \mathrm{Con_T}) \vee (\ulcorner\varphi\urcorner = \ulcorner 0 \neq 0\urcorner \wedge \neg\,\mathrm{Con_T})]$$

$$\mathrm{Con}'_{\mathrm{T}} \equiv \neg\,\mathrm{Pr}_{\{\varphi:\ \mathrm{Pr}'_{\mathrm{T}}(\ulcorner\varphi\urcorner)\}}(\ulcorner 0 \neq 0\urcorner),$$

gdzie „$\mathrm{Pr_T}(\ulcorner\varphi\urcorner)$" to standardowy predykat dowodliwości, a „$\mathrm{Con_T}$" to zdanie „$\neg\,\mathrm{Pr_T}(\ulcorner 0 \neq 0\urcorner)$". Łatwo zauważyć, że jeśli *T* jest niesprzeczna, to dla dowolnej formuły φ:

$$\mathbf{N} \models \mathrm{Pr}'_{\mathrm{T}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \equiv T \vdash \varphi.$$

Zdanie „$\mathrm{Con}'_{\mathrm{T}}$" mówi zatem, że nie istnieje dowód sprzeczności w oparciu o zbiór twierdzeń *T*, czyli: *T* jest niesprzeczna. Możemy obecnie wykazać, że

$$T \vdash \mathrm{Con}'_{\mathrm{T}}.$$

Dowód (wewnątrz teorii *T*):

Załóżmy, że $\neg\,\mathrm{Con}'_{\mathrm{T}}$, czyli: $\mathrm{Pr}_{\{\varphi:\ \mathrm{Pr}'_{\mathrm{T}}(\ulcorner\varphi\urcorner)\}}(\ulcorner 0 \neq 0\urcorner)$. Rozważamy obecnie dwa przypadki: (1) $\mathrm{Con_T}$, (2) $\neg\,\mathrm{Con_T}$. Pokazujemy, że w obu przypadkach uzyskujemy sprzeczność.

Ad (1). Skoro $\mathrm{Con_T}$, to otrzymujemy:

$$\forall\varphi\,[\mathrm{Pr}'_{\mathrm{T}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \equiv \mathrm{Pr_T}(\ulcorner\varphi\urcorner)],$$

a zatem z założenia:

$$\mathrm{Pr}_{\{\varphi:\ \mathrm{Pr_T}(\ulcorner\varphi\urcorner)\}}(\ulcorner 0 \neq 0\urcorner).$$

Stąd:

$$\mathrm{Pr_T}(\ulcorner 0 \neq 0\urcorner),$$

czyli:

$$\neg\,\mathrm{Con_T}.$$

Uzyskaliśmy zatem sprzeczność.

Ad 2. Tu zakładamy, że $\neg\,\mathrm{Con_T}$. Zatem jedyną formułą spełniającą warunek $\mathrm{Pr}'_{\mathrm{T}}(v)$ jest $\ulcorner 0 = 0\urcorner$. Otrzymujemy więc:

$$\mathrm{Pr}_{\{0=0\}}(\ulcorner 0 \neq 0\urcorner),$$

czyli: zbiór tautologii rachunku predykatów jest sprzeczny. Wiadomo jednak, że wewnątrz *T* potrafimy udowodnić niesprzeczność rachunku predykatów:

$$\neg\,\mathrm{Pr}_{\{0=0\}}(\ulcorner 0 \neq 0\urcorner),$$

a zatem i tu dostajemy sprzeczność.

W tej sytuacji pojawia się pytanie, w jakim sensie wolno nam twierdzić, że niesprzeczność teorii *T* nie jest dowodliwa w *T*. Dysponujemy częściową odpowiedzią: wiadomo np., że jeśli predykat „$\mathrm{PR_T}(v)$", którym się posługujemy, spełnia tzw. warunki wywodliwości, wprowadzone przez Hilberta i Bernaysa,[9] to można udowodnić dla T drugie twierdzenie o niezupełności. Wciąż możemy jednak pytać o interesujące pojęcia dowodliwości, przy których zdanie stwierdzające niesprzeczność teorii T okaże się jej twierdzeniem.

BIBLIOGRAFIA

Cutland, N. (1980), *Computability. An Introduction to Recursive Function Theory*, Cambridge University Press, Cambridge.

Feferman, S. (1960), „Arithmetization of metamathematics in a general setting", *Fundamenta Mathematicae*, vol. 49, s. 35—92.

Gödel, K. (1931), „Über formal unentscheidbare Sätze der Prinzipia Mathematica und verwandter Systeme, I", *Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol. 38, s. 173—98.

Krysztofiak, W. (2000), „Twierdzenia Gödla, możliwe światy i intensjonalność", [w:] J. Hartman (red.), *Filozofia i logika. W stronę Jana Woleńskiego*, Wydawnictwo Aureus, Kraków, s. 63—83.

Smorynski, C. (1977), „The incompleteness theorems", [w:] J. Barwise (red.), *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam.

[9] W sprawie warunków wywodliwości, zob. np. [Smorynski 1977].