Filozofia Nauki
Rok V, 1997, Nr 3(19)

ARCHIWUM

Jan Łukasiewicz

Logika i problem podstaw matematyki[1]

Kiedy w Szwajcarii publikowano po niemiecku zamieszczony poniżej tekst, Ojczyzna jego autora, Jana Łukasiewicza, rozdarta była między dwóch zaborców: narodowo-socjalistyczną Rzeszę Niemiecką i Rosję sowiecką. Obaj okupanci postawili sobie za cel likwidację elity kulturalnej Polski. Prowadzić do tego miały dwie drogi: wyniszczenie fizyczne inteligencji i przerwanie ciągłości tradycji intelektualnych Narodu.

Drukujemy „Logikę i problem podstaw matematyki" w polskim przekładzie nie tylko dlatego, że jest to znakomity tekst wybitnego uczonego — prawie niedostępny w polskich księgozbiorach. Dając go do ręki naszym Czytelnikom, chcemy przede wszystkim odtworzyć jeszcze jedną nić więzi z dziedzictwem, które dla następnych pokoleń Polaków miało po prostu przestać istnieć.

Redakcja

1. Podstawową dyscypliną logiczną jest rachunek zdań. Nad rachunkiem zdań nadbudowane są inne dyscypliny logiczne, w szczególności rachunek predykatów, a z kolei na logice opiera się cała matematyka. Rachunek zdań jest więc najgłębszą podstawą wszystkich nauk dedukcyjnych. Temu fundamentalnemu rachunkowi i jego znaczeniu dla matematyki poświęcony jest niniejszy wykład.

2. Logikę zdań stale zaniedbywano. Nieznana Arystotelesowi, wynaleziona została dopiero przez stoików. Jednakże stoicka logika zdań została wyparta zarówno w starożytności, jak i w średniowieczu i czasach nowożytnych przez Arystotelesowską

[1] Zob.: „Die Logik und das Grundlagen problem", *Les entretiens de Zurich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques. 6-9 Décembre 1938. Exposes et discussions* (red. F. Gonseth), Zurich, Editeurs S.A. Leemann frères & Cie. 1941, s. 82-100.

sylogistykę. Praca genialnego niemieckiego logika Fregego, który w 1879 roku stworzył rachunek zdań niemalże w doskonałej postaci, nie zwróciła na siebie zrazu żadnej uwagi. Dopiero w 1910 roku pp. Russell i Whitehead w swojej fundamentalnej pracy *Principia mathematica* umieścili rachunek zdań na szczycie logiki matematycznej, gdyż stało się jasne, jakie zasadnicze znaczenie ma ta dysyplina w obrębie nauk matematycznych.

3. Mimo to po dziś dzień większość matematyków zdaje się nie wiedzieć zbyt wiele o rachunku zdań. Posługują się oni całkowicie intuicyjnie, jak to czynił już Arystoteles, kilkoma najprostszymi regułami wnioskowania tej logiki, nie domyślając się przy tym, jak bogata jest ona w twierdzenia i jaką obfitość problemów nastręcza. Aby moich Szanownych Słuchaczy wprowadzić w te problemy, chcę jako przykład wymienić dwie spośród najczęściej przez matematyków używanych reguł wnioskowania, które należą do logiki zdań.

4. Jeśli dane są dwie przesłanki o następującej postaci: „jeśli p, to q" oraz „jeśli q, to r", to można z nich wyciągnąć wniosek: „jeśli p, to r". W ujęciu symbolicznym („C" odpowiadają słowa „jeśli-to"):

$$\begin{array}{cc} Cpq & P_1 \\ Cqr & P_2 \\ \hline Cpr & S \end{array}$$

Jeśli pierwszą przesłankę oznaczy się przez P_1, drugą przez P_2, a konkluzję przez S, to oczywiście zachodzi formuła:

(1) $$CP_1CP_2S.$$

A więc, „jeśli P_1, to jeśli P_2, to S". Jeśli w formułach tych na miejsce liter P_1, P_2 i S podstawi się wyrażenia przez nie oznaczane, to otrzymuje się następującą tezę rachunku zdań:

(2) $$CCpqCCqrCpr.$$

Słownie: „Jeśli (jeśli p, to q), to [jeśli (jeśli q, to r), to (jeśli p, to r)]". Jest to prawo sylogizmu hipotetycznego, najbardziej znanego sposobu wnioskowania.

5. Inną bardzo często stosowaną regułą wnioskowania jest wnioskowanie pośrednie. Zdania p dowodzi się pośrednio w ten sposób, że za punkt wyjścia w dowodzie bierze się jego negację Np („N" oznacza „nie"), a z Np wynika zdanie q, o którym wiadomo, że jest fałszywe. A zatem, wnioskuje się dalej, że również Np musi być fałszywe, a stąd p musi być prawdziwe. Wnioskowanie pośrednie ma przeto formę:

$$\begin{array}{cc} CNpq & P_1 \\ Nq & P_2 \\ \hline p & S \end{array}$$

Gdy do tej reguły wnioskowania zastosuje się formułę (1), to otrzymuje się inną tezę rachunku zdań:

(3) $$CCNpqCNqp.$$

Teza ta, która słownie brzmi: „jeśli (jeśli nie-p, to q), to (jeśli nie-q, to p)", jest jedną z odmian prawa transpozycji.

6. Ta druga reguła wnioskowania została zakwestionowana przez znanego matematyka, p. prof. Brouwera. Daje się ona mianowicie użyć do udowodnienia istnienia takich liczb, których nie można wytworzyć efektywnie — czyli drogą konstrukcji. Efektywnie dowodzi się np. istnienia prostych liczb pierwszych, na podstawie następującego twierdzenia logiki predykatów:

(4) $$CFa\Sigma xFx.$$

Słowami: „Jeśli F od a, to istnieje takie x, że F od x". Jeśli „Fx" znaczy „x jest prostą liczbą pierwszą", i jeśli w (4) zamiast a podstawi się liczbę 2, to otrzymuje się następujący wywód:

[1] $CF2\Sigma xFx$
[2] $F2$
[1] = C[2][3]
[3] ΣxFx.

Mówiąc swobodnie:

1. Jeśli 2 jest prostą liczbą pierwszą, to istnieją proste liczby pierwsze.
2. 2 jest prostą liczbą pierwszą.

A więc przez odrywanie:

3. Istnieją proste liczby pierwsze.

7. Twierdzenie ezgzystencjalne ΣxFx można również udowodnić pośrednio. Jeśli przyjmie się negację tego twierdzenia, czyli $N\Sigma xFx$ jako punkt wyjścia dla dowodu, to z tej negacji otrzymuje się twierdzenie fałszywe α i na podstawie tezy (3) twierdzenie egzystencjalne. Wywód wygląda następująco:

[1] $CCNpqCNqp$
[2] $CN\Sigma xFx\alpha$
[3] $N\alpha$
[1] $p/\Sigma xFx$, q/α = [4]
[4] $CCN\Sigma xFx\alpha CN\alpha\Sigma xFx$
[4] = C[2][5]
[5] $CN\alpha\Sigma xFx$
[5] = C[3][6]
[6] ΣxFx.

Zakłada się tu, że [2] i [3] są przesłankami prawdziwymi. Przez podstawienie do [1] otrzymuje się [4], a z [4] uzyskuje się poprzez dwukrotne odrywanie zdanie egzystencjalne [6].

8. Zdania egzystencjalnego otrzymanego w ten — czyli nieefektywny — sposób nie chcą uznać zwolennicy logiki intuicjonistycznej. W związku z tym są oni zmuszeni odrzucić również prawo transpozycji *CCNpqCNqp*. Istnieją też jeszcze inne tezy logiki zdań, które według intuicjonistów nie mają ważności ogólnej. Wśród owych proskrybowanych tez znajduje się druga odmiana prawa transpozycji *CCNpNqCpq*, ponadto prawo podwójnego przeczenia z negacją w poprzedniku *CNNpp*, jak również prawo wyłączonego środka *ApNp* („*A*" jest znakiem alternatywy „lub"; „*ApNp*" znaczy „*p* lub nie-*p*"). Natomiast ważność zachowują dwa pozostałe prawa transpozycji, *CCpqCNqNp* i *CCpNqCqNp*, prawo podwójnego przeczenia z negacją w następniku *CpNNp*, oraz prawo niesprzeczności *NKpNp* („*K*" jest znakiem koniukcji „i"; „*NKpNp*" znaczy „nie zarazem *p* i nie-*p*"). Sprawa staje się poważna: widać, że istnieje spór wewnątrz najprostszej i najbardziej podstawowej dyscypliny logicznej — prawdziwy spór o podstawy matematyki.

9. Wszelako logika zdań nie jest kupą kamieni, która będzie istniała dalej nawet gdy się z niej kilka kamieni usunie; przeciwnie, jest ona mechanizmem o największej precyzji, który staje już po usunięciu jednego kółeczka i musi być przebudowany. Dlatego wszyscy jesteśmy wielce zobowiązani p. Heytingowi, że przedsięwziął on w 1930 roku formalizację intuicjonistycznego rachunku zdań. Udało mu się zbudować system aksjomatów dla intuicjonistycznego rachunku zdań, którego nie będę tu przytaczał; natomiast w związku z tym systemem chciałbym zakomunikować Państwu wynik, do którego doszedłem w maju bieżącego roku dzięki zachęcie ze strony mojego wielce szanownego przyjaciela, p. prof. Scholza z Münster; wynik ten ułatwi nam dokonanie porównania między zwykłą i intucjonistyczną logiką zdań.

10. Do zbudowania zwykłego rachunku zdań wystarcza następujący niezależny system aksjomatów, składający się z czterech grup aksjomatów:

I.	1	*CpCqp*
	2	*CCpCpqCpq*
	3	*CCpqCCqrCpr*
II.	4	*CKpqp*
	5	*CKpqq*
	6	*CCpqCCprCpKqr*
III.	7	*CpApq*
	8	*CpApq*
	9	*CCprCCqrCApqr*
IV.	10	*CCpNqCqNq*
	11	*CNpCpq*
	12	*CCCpNpqCCpqq*

Aksjomaty grupy I. zawierają tylko znak implikacji „*C*". Charakteryzują one tzw. logikę pozytywną w sensie p. prof. Bernaysa. Aksjomaty grupy II. zawierają ponadto znak koniunkcji „*K*", a aksjomaty grupy III. — znak alternatywy „*A*". Aksjomaty trzech pierwszych grup podał już p. prof. Bernays. Aksjomaty grupy IV. dotyczą znaku negacji „*N*". Do systemu należą dwie reguły wnioskowania: reguła podstawiania, która pozwala nam na miejsce zmiennej podstawiać dowolne wyrażenie sensowne, oraz reguła odrywania, która głosi, że z wyrażenia $C\alpha\beta$ i α można zawsze wyprowadzić β.

11. Powyższy system 12 aksjomatów jest, jak już powiedziałem, ważny dla zwykłego czyli klasycznego rachunku zdań. Jeśli usunie się ostatni — 12 — aksjomat, to otrzymuje się system aksjomatów intuicjonistycznego rachunku zdań, który jest równoważny systemowi aksjomatów p. Heytinga wraz ze wszystkimi jego regułami wnioskowania. Jeśli usunie się dwa ostatnie aksjomaty — 11 i 12 — to powstaje tzw. minimalny rachunek p. Johannssona. Stosunek między klasycznym rachunkiem zdań a intuicjonistycznym rachunkiem zdań jest teraz jasny: intuicjonistyczna logika zdań obejmuje dokładnie określoną część właściwą tez klasycznego rachunku zdań i dlatego jest systemem znacznie słabszym niż tamten. Jest już zadaniem matematyków zbadanie, co będzie można osiągnąć na tej słabszej podstawie matematyki. Wdzięczne i ważne dla problemu podstaw matematyki mogą być ponadto takie badania, jak zapoczątkowane przez mojego wielce szanownego warszawskiego kolegę, p. prof. Sierpińskiego badania nad pewnikiem wyboru p. Zermela oraz jego rolą w teorii mnogości i analizie.

12. Nie chcę tu poruszać kwestii, czy usunięcie jakiejś reguły wnioskowania z klasycznego rachunku zdań jest usprawiedliwione. Jedno jest dla mnie jasne: w chwili obecnej nie można wymuszać roztrzygnięcia problemu podstaw matematyki ani na gruncie logiki, ani na gruncie matematyki. Tym bardziej nie są rozstrzygające argumenty filozoficzne przytaczane ewentualnie przez jedną czy drugą stronę. Trzeba najpierw zgłębić sam problem. Uczynię to, chociaż jestem świadom, jak ciężka jest owa droga w głąb. Chciałbym przy tym podnieść cztery okoliczności — jakby cztery drogowskazy. (a) Istnieją matryce logiki zdań. (b) Każdemu systemowi logiki zdań odpowiada adekwatna matryca. (c) Wielowartościowe matryce można również interpretować intuicyjnie. (d) W matrycach interpretowanych intuicyjnie muszą być uwzględnione wszystkie funkcje logiczne dopuszczalne ze względu na daną matrycę.

13. Metodę matrycową wynalazł w 1885 roku znany logik amerykański Charles Peirce. W logice zdań prawdziwość tez nie zależy od ich treści, lecz od wartości logicznej. W klasycznym rachunku zdań istnieją dwie wartości logiczne: prawda i fałsz. Jeśli prawdę oznaczymy przez „1" a fałsz przez „2", to można sformułować następujące równania:

Negacja	Implikacja	Koniunkcja	Alternatywa
$N1 = 2$	$C11 = 1$	$K11 = 1$	$A11 = 1$
$N2 = 1$	$C12 = 2$	$K12 = 2$	$A12 = 1$
	$C21 = 1$	$K21 = 2$	$A21 = 1$
	$C22 = 1$	$K22 = 2$	$A22 = 2$

Całość tych równań, które będzie można przedstawić krócej w postaci następujących tabel (przy funkcjach dwuargumentowych pierwszy argument jest zapisany po lewej stronie a drugi u góry):

N	
1	2
2	1

C	1	2
1	1	2
2	1	1

K	1	2
1	1	2
2	2	2

A	1	2
1	1	1
2	1	2

nazywa się matrycą dla *N*, *C*, *K* i *A* . Każda matryca ma co najmniej jedną wartość wyróżnioną; tutaj jest nią prawda, czyli 1.

14. Z każdą matrycą związana jest określona metoda weryfikacji. Mówimy mianowicie, że wyrażenie rachunku zdań spełnia matrycę, jeśli przy nadaniu zmiennym zdaniowym w nim występującym wszystkich wartości matrycy wyrażenie to po zredukowaniu go zgodnie z matrycą przechodzi w wartość wyróżnioną. Tak np. teza *CCCpNpqCCpqq* spełnia wyżej podaną matrycę, gdyż otrzymujemy:

dla $p/1$, $q/1$: $CCC1N11CC111 = CCC121C11 = CC211 = C11=1$,

dla $p/1$, $q/2$: $CCC1N12CC122 = CCC122C22 = CC221 = C11=1$,

dla $p/2$, $q/1$: $CCC2N21CC211 = CCC211C11 = CC111 = C11=1$,

dla $p/2$, $q/2$: $CCC2N22CC222 = CCC212C12 = CC122 = C22=1$.

Wszystkie matryce są dziedziczne ze wzgędu na regułę podstawiania. Jeśli zatem wyrażenie spełnia daną matrycę, to tę matrycę spełniają również wszystkie podstawienia tego wyrażenia. Jeśli matryca będzie dziedziczna ze względu na regułę odrywania, to jest to warunek wystarczający, jeśli również i nie konieczny, do tego, żeby dwuargumentowa funkcja *Fab*, na której opiera się reguła odrywania, zwykle o postaci implikacji, przy wyróżnionej wartości *a* tylko wtedy była równa wartości wyróżnionej, gdy również *b* jest wyróżniona. Tak więc podana wyżej formuła *C*1*b* tylko wtedy jest równa 1, gdy również *b* jest równa 1. Taką matrycę mój warszawski kolega, p. Tarski, nazywa normalną. Wszystkie matryce normalne są dziedziczne ze względu na regułę odrywania; jeśli mianowicie normalna matryca jest spełniona przez *Fab* i *a* , to musi być ona spełniona również przez *b*.

15. Metoda matrycowa została najpierw użyta do weryfikacji tez klasycznego rachunku zdań. Jednakże wkrótce okazało się, że metodzie tej trzeba przypisać o wiele większe znaczenie. Umożliwia nam ona mianowicie przeprowadzanie w dziedzinie logiki zdań dowodów niezależności, które nie były jeszcze znane Fregemu i Russellowi. Zasługa pokazania, jak metodę matrycową można wykorzystywać do dowodów niezależności przypada p. prof. Bernaysowi. Ale ta sama metoda była mi znana jeszcze przed jej opublikowaniem przez p. Bernaysa. Ideę tego dowodu niezależności najlepiej można wyjaśnić na jakimś przykładzie. Jeśli trzeba wykazać w wyżej podanym systemie

aksjomatów niezależność ostatniego — 12 — aksjomatu od pozostałych aksjomatów, to oczywiście wystarczy znaleźć cechę, która jest dziedziczna ze względu na regułę wnioskowania i przysługuje wszystkim aksjomatom z wyjątkiem ostatniego. Spełnianie przez aksjomat matrycy normalnej jest właśnie tą cechą tego aksjomatu, która jest dziedziczna ze względu na regułę podstawiania i odrywania. Konstruujemy następującą matrycę trójwartościową dla *N*, *C*, *K*, i *A*:

N	
1	3
2	3
3	1

C	1	2	3
1	1	2	3
2	1	1	3
3	1	1	1

K	1	2	3
1	1	2	3
2	2	2	3
3	3	3	2

A	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	1	2	3

1 jest tu znowu wartością wyróżnioną. Matryca jest normalna, gdyż $C1b$ jest równe 1 tylko wtedy, gdy również b jest równe 1. Łatwo można się przekonać, że matryca jest spełniona przez jedenaście pierwszych aksjomatów, gdyż przy wszystkich wartościach zmiennych — 1, 2, 3, — aksjomaty te po dokonaniu redukcji według matrycy przechodzą w 1. Tylko ostatni aksjomat nie spełnia matrycy, bowiem dla $p/2$ i $q/2$ otrzymujemy:

$$CCC2N22CC222 = CCC232C12 = CC322 = C12 = 2.$$

16. W ten sposób pierwsza z czterech wyżej wspomnianych okoliczności byłaby omówiona. Istnieją matryce logiki zdań i grają one w rachunku zdań wyjątkową rolę. Przechodzę więc do drugiej okoliczności. Dzięki metalogicznym badaniom p. Tarskiego jesteśmy w stanie ściśle zdefiniować pojęcie systemu logiki zdań. Przez system logiki zdań rozumiemy mianowicie zbiór sensownych wyrażeń logiki zdań, domknięty ze względu na dane reguły wnioskowania. Jako reguły wnioskowania wchodzą przy tym w rachubę w pierwszej kolejności reguła podstawiania i odrywania. System logiki zdań tworzą więc dowolne wyrażenia sensowne, np. *CCppp* i *CCCpqqCCqpp*, wraz ze wszystkimi konsekwencjami, które mogą być z nich wyprowadzone przy użyciu wymienionych reguł wnioskowania. Jest teraz jasne, że każda normalna matryca definiuje jeden system logiki zdań. Dziwnym zbiegiem okoliczności zachodzi również twierdzenie odwrotne. Jeden z moich warszawskich kolegów, p. Lindenbaum, udowodnił mianowicie, że dla każdego systemu logiki zdań istnieje adekwatna matryca normalna z co najwyżej przeliczalnym zbiorem wartości. Matrycę nazywa się adekwatną względem systemu, jeśli jest ona spełniona przez wszystkie wyrażenia tego systemu i tylko przez nie. To ważne twierdzenie zostało opublikowane bez dowodu w wydanych przeze mnie wraz z p. Tarskim w 1930 roku „Badaniach nad rachunkiem zdań".

17. Z twierdzenia tego chiałbym wyciągnąć kilka wniosków. Przede wszystkim jasne jest, że wszystkie systemy logiki zdań zbudowane aksjomatycznie są systemami

logiki zdań w sensie definicji p. Tarskiego. Zatem zgodnie z twierdzeniem p. Lindenbauma wszystkie takie systemy powinny mieć adekwatną matrycę normalną. Dla klasycznego rachunku zdań zbudowanego aksjomatycznie podana wyżej matryca normalna jest adekwatna. Albowiem zostało po wielokroć wykazane, że matryca ta spełniona jest przez wszystkie tezy klasycznego rachunku zdań i tylko przez nie. Dlatego też klasyczny rachunek zdań został nazwany dwuwartościowym. Dla każdego systemu w porównianiu z nim słabszego, tzn. dla każdego takiego systemu, w którym pewne tezy dwuwartościowego rachunku nie zachodzą, adekwatna matryca nie jest przeto dwuwartościowa, lecz wielowartościowa. Takim systemem jest m.in. zaksjomatyzowany intuicyjny rachunek zdań p. Heytinga. Rachunek ten musi więc posiadać adekwatną matrycę wielowartościową. P. Gödel udowodnił, że dla systemu Heytingowskiego nie istnieje żadna adekwatna matryca normalna ze skończonym zbiorem wartości. Niezależnie od Gödla do tego samego wyniku doszedł w Warszawie jeden z moich byłych uczniów, p. Jaśkowski, który również skonstruował matrycę intuicjonistycznej logiki zdań o nieskończonej liczbie wartości.

18. Nie mogę tu wchodzić głębiej w ten bardzo skomplikowany problem adekwatnych matryc intuicjonistycznego rachunku zdań. Dla celu, który sobie wytyczyłem, wystarczy wybrać prostszy przykład. Podałem już wyżej trójwartościową matrycę normalną, która jest spełniona przez pierwszych jedenaście aksjomatów stworzonego przeze mnie systemu aksjomatycznego. Tych jedenaście pierwszych aksjomatów stanowi więc intuicjonistyczną logikę zdań. Wspomniana matryca, która pochodzi zresztą od p. Heytinga, nie jest jednak adekwatna względem intuicjonistycznego rachunku. Chociaż bowiem jest ona spełniona przez wszystkie tezy tego rachunku, to zarazem jednak spełniają ją też inne tezy, które nie należą do rachunku intuicjonistycznego. Toteż przy pomocy tej matrycy zostaje zdefiniowany system mocniejszy. Udało mi się ten system zaksjomatyzować.

19. Jeśli w systemie aksjomatycznym wprowadzonym w punkcie 10 zamiast aksjomatu 12 przyjąć następujący aksjomat:

12a *CCNpqCCCqpqq*,

to aksjomaty 1-11 oraz 12a tworzą system niezależny, dla którego adekwatna jest trójwartościowa matryca normalna Heytinga, podana w punkcie 15. Aksjomat 12a, z jednej strony, nie daje się wyprowadzić z aksjomatów rachunku intuicjonistycznego, co można udowodnić przy pomocy matrycy czterowartościowej, a z drugiej strony, jeśli aksjomat ten spełnia trójwartościową matrycę podaną przez Heytinga, to również wraz z pozostałymi aksjomatami nie wystarcza do ugruntowania rachunku dwuwartościowego. W ten sposób otrzymaliśmy prosty przykład systemu logiki zdań ujętego w formie aksjomatycznej, który jest słabszy niż klasyczny rachunek zdań, ale który tak samo jak ten rachunek posiada adekwatną matrycę normalną, z tym że nie dwuwartościową, lecz trójwartościową. Dla wszystkich systemów, które są słabsze od dwuwartościowego rachunku zdań, istnieją adekwatne wielowartościowe matryce normalne. Nie jest to przypadek — lecz prawo. Prawo to przydaje metodzie matrycowej fundamentalne znaczenie. W ten sposób wyczerpaliśmy to, co się tyczy drugiej z czterech wspomnianych uprzednio okoliczności.

20. Matryca dla dwuwartościowego rachunku zdań powstała na bazie intuicyjnej. Wartości matrycy zostały zinterpretowane jako wartości logiczne: 1 była prawdą, a 2 fałszem. Później jednak, gdy metody matrycowej zaczęto używać do dowodów niezależności i w tym celu wynaleziono wiele matryc wielowartościowych, intuicyjna interpretacja wartości matrycy zatraciła się. Nie było przecież potrzeby, aby te wartości interpretować jakoś intuicyjnie. Matryce służyły do tego, aby wykrywać cechy danych tez, które byłyby dziedziczne ze względu na reguły wnioskowania. Wartości matrycy zostały zdegradowane do nic nie znaczących stałych, a tworzenie matryc przybrało charakter czysto formalny. Jednakże jest rzeczą możliwą, aby również w matrycach wielowartościowych wartości interpretować intuicyjnie. Jako pierwszy przykład chciałbym przytoczyć wskazaną wyżej trójwartościową matrycę wprowadzoną przez p. Heytinga.

21. W swojej głównej pracy o „regułach formalnych logiki intuicjonistycznej" p. Heyting mówi: „Grupa XII — jest to właśnie matryca o której mowa, z tym, że wartości są w niej nazwane inaczej — może być interpretowana następująco: 2 oznacza dowolne zdanie prawdziwe, które nie może być fałszywe, ale którego prawdziwość nie została wykazana. Dalej otrzymuje się właśnie powyższe tabele." Z tego objaśnienia autora wynika, że zgodnie ze swoim intuicyjnym tokiem myślenia uważał on, że wspomnianą matrycę jest w stanie skonstruować z oczywistą pewnością. Spróbujmy ów tok myślenia prześledzić.

22. Wśród 30 równań, które obejmuje matryca, 14 następujących wzięto z rachunku dwuwartościowego:

$$\begin{array}{llll}
N1 = 3 & C11 = 1 & K11 = 1 & A11 = 1 \\
N3 = 1 & C13 = 3 & K13 = 3 & A13 = 1 \\
 & C31 = 1 & K31 = 3 & A31 = 1 \\
 & C33 = 1 & K33 = 3 & A33 = 3
\end{array}$$

1 jest tu mianowicie prawdą, a 3 fałszem. Dalszych 10 równań, dla koniunkcji i alternatywy, otrzymuje się na podstawie następujących rozważań: nowa wartość 2 przysługuje zdaniom, które nie mogą być fałszywe, ale nie są dowiedzione. Wartość ta jest w sposób oczywisty słabsza niż prawda, ale mocniejsza jest niż fałsz. W oczywisty więc sposób wartość koniunkcji opiera się na słabszej wartości argumentu, alternatywy zaś — na mocniejszej wartości argumentu. Przy równej wartości argumentów wartość obu funkcji jest równa wartości argumentów. Tak otrzymuje się oczywiste równania:

$$K12 = 1 \quad K23 = 3 \quad A12 = 1 \quad A23 = 2$$
$$K21 = 2 \quad K32 = 3 \quad A21 = 1 \quad A32 = 2$$
$$K22 = 2 \qquad\qquad A22 = 2$$

Dwa dalsze równania, a mianowicie dla implikacji:

$$C21 = 1 \text{ i } C32 = 1$$

otrzymuje się na podstawie reguły ważnej w rachunku dwuwartościowym, która głosi, że przy prawdziwym następniku lub fałszywym poprzedniku implikacja musi być prawdziwa bez względu na wartość drugiego argumentu.

Trzecie równanie dla implikacji:

$$C22 = 1$$

wynika z w pełni intuicyjnej zasady tożsamości. Trudność mogłaby powstać co najwyżej przy określaniu wartości wyrażeń $C12$, $C23$ i $N2$. $C12$ nie jest prawdą, ponieważ w przeciwnym razie również 2 musiałoby być prawdą. Ale nie może ono być też fałszem, gdyż nie posiada fałszywego następnika. Otrzymujemy więc:

$$C12 = 2$$

Natomiast w sposób oczywisty $C23$ jest fałszem, bowiem poprzednik, który nie może być fałszywy, nie może pociągać za sobą fałszywego następnika. Stąd otrzynuje się:

$$C23 = 3.$$

Jako ostatnie równanie otrzymujemy:

$$N2 = 3,$$

gdyż jest jasne, że negacja zdania, które nie może być fałszywe, jest także fałszem.

23. Byłem w stanie tym łatwiej wczuć się w ten tok myślowy, że sam przed laty, i to jako pierwszy, stworzyłem intuicyjną matrycę trójwartościową. Jednakże kierowały mną wówczas inne idee. Zgodnie ze znanym przykładem Arystotelesa doszedłem do wniosku, że sądy o przypadkowych zdarzeniach przyszłych nie są ani prawdziwe. ani fałszywe. To, że w południe 8 grudnia 1939 będę w Warszawie, jest sądem, którego słusznie dzisiaj nie można określić ani jako prawdziwy, ani jako fałszywy. Musi on więc mieć trzecią wartość logiczną. Ta trzecia wartość logiczna ma się wobec tego, co jest możliwe tak, jak prawda do tego, co rzeczywiste, czy fałsz do tego, co nierzeczywiste. Na podstawie tej idei już w 1920 roku stworzyłem następującą matrycę trójwartościową:

N	
1	3
2	2
3	1

C	1	2	3
1	1	2	3
2	1	1	2
3	1	1	1

K	1	2	3
1	1	2	3
2	2	2	3
3	3	3	3

A	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	1	2	3

1 jest wartością wyróżnioną — prawdą, 3 jest fałszem, 2 jest wartością trzecią, ym co «możliwe». Matryca jest normalna.

24. Porównanie powyższej matrycy z matrycą Heytingowską jest nader pouczające. Ponieważ również tutaj trzecia wartość, jako to, co możliwe, jest słabsza niż prawda, a silniejsza niż fałsz, to dla koniunkcji i alternatywy muszą zachodzić te same równania. Natomiast różnica pojawia się w równaniach dla implikacji i negacji, ale tylko w dwóch punktach: dla wyrażeń *C*23 i *N*2. *C*23 = 2, a nie = 3, jak u Heytinga, ponieważ to, co możliwe nie może zmienić się w prawdę czy fałsz. W pierwszym wypadku *C*23 przechodzi w *C*13, a więc w fałsz, w drugim wypadku przekształca się w *C*33, a więc w prawdę. *C*23 nie jest zatem ani prawdziwe, ani fałszywe: ma wartość trzecią. Trzecią wartość musi mieć również *N*2, gdyż jest oczywiste, że skoro sąd „w południe 8 grudnia 1939 roku będę w Warszawie" nie jest dzisiaj ani prawdziwy, ani fałszywy, a tylko możliwy, to również zaprzeczenie tego sądu „w południe 8 grudnia 1939 nie będę w Warszawie" nie może być ani prawdziwe, ani fałszywe, a tylko możliwe. W ten sposób na tych dwóch przykładach omówiona została trzecia z czterech wspomnianych wyżej okoliczności: również macierze wielowartościowe można interpretować intuicyjnie.

25. Istnieją częściowe systemy dwuwartościowego rachunku zdań, tj. systemy, w których nie wszystkie funkcje tego rachunku mogą byc zdefiniowane. Takim systemem częściowym jest system implikacyjny, oparty na implikacji jako jedynym terminie i na tezie *CCCpqrCCrpCsp* (jest to najkrótsza teza, która pociąga za sobą wszystkie tezy implikacyjne). Systemy częściowe są niezupełne, a więc niedoskonałe. W systemach implikacyjnych nie jest definiowalna ani negacja, ani koniunkcja. Jeśli chcemy mieć logikę stosowalną we wszystkich wypadkach i zupełną, to musimy starać się dążyć do tego, aby budować takie systemy logiki zdań, w których wszystkie dopuszczalne w danym systemie funkcje były definiowalne. W dwuwartościowym rachunku zdań mamy $2^2 = 4$ możliwe funcje jednoargumentowe i $2^{2^2} = 16$ funkcji dwuargumentowych. Jeśli nawet nie wszystkie z tych funkcji są potrzebne do praktycznego wnioskowania i mogą być wyrażone w języku potocznym, to jednak wszystkie one są definiowalne w systemie implikacyjno-negacyjnym. Zatem system ten jest zupełny.

26. Jak teraz przedstawia się problem systemów wielowartościowych? Wraz ze wzrostem liczby wartości matrycowych rośnie liczba możliwych funkcji. Zgodnie z elementarnym obliczeniem kombinatorycznym dla matrycy *n*-wartościowej mamy n^n możliwych funkcji jednoargumentowych i n^{n^2} możliwych funkcji dwuargumentowych. Liczby rosną bardzo szybko. Dla systemów trójwartościowych liczba możliwych funkcji jednoargumentowych wynosi $3^3 = 27$, a dwuargumentowych $3^{3^2} = 19\ 483$. W systemach czterowartościowych liczby te wynoszą odpowiednio $4^4 = 256$ i $4^{4^2} = 4\ 294\ 967\ 296$, a więc ponad cztery miliardy. W matrycach o przeliczalnej liczbie wartości zbiór możliwych funkcji jest nieprzeliczalny.

27. Powróćmy teraz do naszych przykładów. W trójwartościowej logice zdań, zwłaszcza w takiej, w której wartości logiczne można interpretować intuicyjnie, wolno — podobnie jak w rachunku dwuwartościowym — wymagać, aby wszystkie funkcje były definiowalne. Nie jest to jednak spełnione w wypadku podanych wyżej systemów trójwartościowych. Można łatwo np. wykazać, że w żadnym z tych systemów nie może być zdefiniowana funkcja „*Tp*" (czytana jako „*tertium* od *p*"), która przyjmuje stałą wartość 2 (a więc $Tp = 2$). Tym samym oba systemy są niezupełne. Niezupełny jest również rachunek intuicjonistyczny, w którym zresztą nie można ustalić, jak nieskończenie wiele wartości należącej do niego matrycy da się zinterpretować intuicyjnie. Spróbujmy zatem uzupełnić oba z wprowadzonych wyżej trójwartościowych systemów. Ponieważ prace nad systemem opartym na matrycy Heytinga nie są jeszcze zakończone, za podstawę naszych dalszych rozważań musi służyć system trójwartościowy zbudowany przeze mnie.

28. Przede wszystkim chciałbym stwierdzić, że w stworzonym przeze mnie trójwartościowym rachunku zdań zarówno koniunkcja, jak i alternatywa jest definiowalna. Definicje te brzmią następująco:

$$Apq = CCpqq \quad \text{i} \quad Kpq = NANpNq.$$

(Chciałbym tu dodać, że w trójwartościowym rachunku Heytinga alternatywa jest definiowalna, a mianowicie

$$Apq = KCCpqqCCqpp,$$

ale koniunkcja — nie; w intuicjonistycznym rachunku zdań żadna z czterech funkcji *N*, *C*, *K* i *A* nie jest definiowalna przez pozostałe.) Następnie trzeba podkreślić, że w moim rachunku zbiór tez z *C* i *N*, które spełniają matrycę, jest aksjomatyzowalny. Dowód tego podał jeden z moich byłych uczniów, p. Wajsberg, który stworzył dla tego rachunku następujący system aksjomatów:

[1] *CpCqp*

[2] *CCpqCCqrCpr*

[3] *CCCpNppp*

[4] *CCNpNqCqp*.

Stworzona przeze mnie matryca trójwartościowa jest adekwatna względem tego systemu aksjomatów.

29. Trójwartościowy rachunek zdań zdefiniowany na podstawie mojej matrycy i *zaksjomatyzowany* przez p. Wajsberga, jak już powiedziałem, nie jest zupełny, bowiem nie wszystkie z 27 funkcji jednoargumentowych i 19 683 funkcji dwuargumentowych są w nim definiowalne. Innemu z moich uczniów, p. Słupeckiemu udało się poprzez dodanie nowej funkcji uzupełnić ten system i ten uzupełniony system zaksjomatyzować. P. Słupecki wykazał, że po dodaniu wspomnianej już wyżej funkcji *Tp* będą mogły być zdefiniowane wszystkie funkcje systemu, i podał dla tej nowej funkcji dwa nowe

aksjomaty. Chciałbym tutaj jeszcze raz przedstawić wielce szanowym słuchaczom zarówno zupełną aksjomatykę tego systemu, jak i adekwatną względem niego matrycę:

[1] *CpCqp*

[2] *CCpqCCqrCpr*

[3] *CCCpNppp*

[4] *CCNpNqCqp*

[5] *CTpNTp*

[6] *CNTpTp*

N	
1	3
2	2
3	1

T	
1	2
2	2
3	2

C	1	2	3
1	1	2	3
2	1	1	2
3	1	1	1

W systemie tym obowiązują reguły podstawiania i odrywania. System aksjomatów jest niezależny, niesprzeczny i zupełny w tym sensie, że każde wyrażenie sensowne w systemie jest albo wyprowadzalne z aksjomatów, albo po dodaniu go do aksjomatów prowadzi do sprzeczności, tj. pociąga za sobą wszystkie wyrażenia sensowne. System ten jest zupełny także w tym sensie, że wszystkie funkcje dopuszczalne w systemie są definiowalne. Wykazuje również wszystkie cechy, które przysługują klasycznemu dwuwartościowemu rachunkowi zdań. W ten sposób wyczerpaliśmy uwagi dotyczące ostatniej z wyżej wspomnianych okoliczności .

30. Przeszliśmy trudną drogę w głąb. Była ona trudna nie tylko dlatego, że rozwiązywane problemy są skomplikowane technicznie — wszędzie unikałem tego, co techniczne i podawałem tylko gotowe wyniki — lecz zwłaszcza dlatego, że chodzi tu o tworzenie całkowicie nowych pojęć i o całkowicie nowe metody. Chciałbym powiedzieć, że wiele tęgich głów zadało sobie ogromy trud, aby dojść do tych wyników. Na zakończenie swego referatu chcę zupełnie krótko wskazać na znaczenie tych wyników i naświetlić ich związek z problemem podstaw matematyki.

31. Na początku referatu podkreśliłem, że intuicjonistyczna logika zdań, która odrzuciła różne tezy dwuwartościowego rachunku zdań, jest systemem słabszym niż ten rachunek. Na niezliczenie wiele sposobów można ten system wzmacniać, wybierając spośród odrzuconych tez dwuwartościowego rachunku za każdym razem inne i dołączając je do niego, aby w końcu otrzymać system najmocniejszy: dwuwartościową logikę zdań. Ze stworzonym przeze mnie i przez p. Słupeckiego zaksjomatyzowanym zupełnym systemem trójwartościowej logiki zdań — jak krótko mówimy: systemem *S* — sprawa ma się zupełnie inaczej. Jeśli do aksjomatów tego systemu dołączy się jakąś nie wyprowadzalną, ale ważną w rachunku dwuwartościowym zdań tezę, to nie otrzymuje się systemu mocniejszego, lecz sprzeczność. Ten ważny fakt chciałbym wyjaśnić na pewnym przykładzie.

[7] *CCNppp*

[7] *p/Tp* = *C*[6][8]

[8] *Tp*

[5] = *C*[8][9]

[9] *NTp*

[2] $q/Cqp = C[1][10]$
[10] $CCCqprCpr$
[10] $q/Np, p/nq, r/Cpq = C[4][11]$
[11] $CNqCqp$
[11] $q/Tp = C[9]C[8][12]$
[12] p

32. Teza *CCNppp* nie jest ważna ani w systemie intuicjonistycznym, ani w systemie *S*. Jeśli tezę tę dołączy się do systemu intuicjonistycznego, to otrzymuje się rachunek dwuwartościowy, jeśli natomiast dołączy się ją do systemu *S*, to powstaje sprzeczność. Sprzeczność tę można wykazać w sposób następujący.

Do systemu aksjomatycznego Słupeckiego dołącza się *CCNppp* jako tezę [7]. Z tej tezy i z aksjomatów [6] i [5] przez podstawienie i oderwanie otrzymuje się dwie tezy, *Tp* i *NTp*, które przeczą sobie nawzajem. Sprzeczność ta jeszcze się wzmocni, gdy na podstawie *CNqCqp*, które są wyprowadzalne w systemie, z [8] i [9] wywnioskuje się zmienną *p*, z której przez podstawianie mogą powstać wszystkie wyrażenia sensowne.

33. Wynika stąd, że system *S* nie jest słabszy niż rachunek dwuwartościowy, lecz jest systemem całkowicie od niego różnym. Z jednej strony istnieją tezy systemu *S*, których w ogóle nie można zinterpretować w rachunku dwuwartościowym, takie jak *CTpNTp* i *CNTpTp*, a z drugiej strony można podać tezy dwuwartościowego rachunku, takie jak *CCNppp*, które w systemie *S* prowadzą do sprzeczności. W ten sposób na naszych oczach powstała całkowicie nowa logika, logika modalna, do której dążył Arystoteles i scholastycy. Nie jest to jedyna możliwa forma trójwartościowej logiki zdań; istnieją różne typy systemów trójwartościowych, które nie są do siebie nawzajem sprowadzalne, i niezliczone formy wyższych systemów wielowartościowych. Te różne formy wielowartościowej logiki zdań mają się się do klasycznego dwuwartościowego rachunku zdań tak samo, jak różne systemy geometrii nieeuklidesowej do geometrii euklidesowej. Zachodzi tylko taka różnica: o ile geometrie nieeuklidesowe można interpretować w geometrii euklidesowej, o tyle interpretacja systemu wielowartościowego w systemie dwuwartościowym wydaje się wykluczona. Odwrotnie, możliwe jest różnorakie zinterpretowanie dwuwartościowej logiki zdań w systemie *S*, tak że rachunek trójwartościowy okazuje się rachunkiem mocniejszym i bogatszym od dwuwartościowego.

34. W ten sposób doszliśmy do najbardziej decydującego spośród kiedykolwiek postawionych w matematyce problemu jej podstaw. Rachunek zdań jest fundamentalną dyscypliną logiczną. Na rachunku tym nadbudowana jest cała logika, a na logice — matematyka. Skoro istnieją różne, niesprowadzalne do siebie nawzajem systemy logiki zdań, to muszą również istnieć różne systemy logiki predykatów, a na tych różnych systemach logicznych będą opierały się jakieś różne systemy teorii mnogości i arytmetyki. Nie pojawiły się jeszcze prace, które by szły w tym kierunku. Jak dotąd udało się

nam stworzyć w sposób formalny i z najwyższą precyzją wielowartościowy system logiki zdań. Jeśli systemy takie mają znaleźć zastosowanie w matematyce, to muszą one zostać zanalizowane również od strony intuicyjnej. Że jest to możliwe, pokazuje przykład intuicjonistycznej logiki zdań. Oby zatem te najwyższej wagi badania fundamentalne były bliskie sercu wszystkim logikom i matematykom.

Przełożył z niemieckiego Jerzy Pluta

Dyskusja

(Odpowiedzi J. Łukasiewicza)

1. Funkcja *Tp* jest ekstensjonalna z tych samych powodów, co i funkcje „*verum p*" i „*falsum p*", które również nie zależą od konkretnej wartości nadanej *p*, a więc mają wartość stałą — dokładnie tak, jak *Tp*.

Skądinąd „*verum p*" odpowiada *Cpp*, a „*falsum p*" — jej negacji. W matrycy trójwartościowej pierwsza ma zawsze wartość 1, druga — zawsze 3 i podobnie *Tp* zawsze wartość 2.

Co się tyczy intuicyjnej interpretacji przedstawionej logiki, to należy ją uznać za system modalny, w którym wartość 2 reprezentowałaby możliwość. Już Arystoteles zwracał uwagę na to, że zdania odnoszące się do wydarzeń przyszłych mogą dziś nie być ani prawdziwe, ani fałszywe; wolno im zatem przypisać trzecią wartość, którą byłaby właśnie możliwość.

2. Funkcja *Tp* jest wyrażeniem najdogodniejszym do zaksjomatyzowania przedstawionego systemu logicznego; do tego celu można jednak posłużyć się także terminem oznaczanym przez *Mp*; jego znaczenie intuicyjne nie budzi żadnych wątpliwości: można go mianowicie zinterpretować jako „możliwość". Odpowiednia aksjomatyka przedstawiałaby się wówczas następująco:

1° *CNMpCNMpNp*

2° *CNMNpCNMNpp*

3° *CMpCMpMNp*

4° *CCpqCCNpqCCMpqq*.

System ten nadaje się więc do interpretacji intuicyjnej. Nie można jednak zinterpretować intuicyjnie wszystkich funkcji definiowanych w tym rachunku. Ich liczba (3^9) jest zbyt duża, aby w języku potocznym istniało wyrażenie odpowiadające każdej z nich.

Z tym samym zjawiskiem mamy zresztą do czynienia już w logice dwuwartościowej. Brak reprezentacji dla części (a nawet dla większości) możliwych funkcji nie stanowi zatem argumentu przeciwko intuicyjności danego systemu.

3. Formuła (1) [jeśli poprzednik nie jest powtórzony] traci ważność, ponieważ znaczenie implikacji [w logice trójwartościowej] nie pokrywa się ściśle z jej znaczeniem w logice tradycyjnej.

4. Skoro *Tp* przyjmuje zawsze wartość 2, która nie jest wartością najwyższą (prawdą), to nigdy nie można będzie wyprowadzić *Tp* z jednego z aksjomatów [(5) i (6)], a *NTp* z drugiego; nigdy więc nie dojdzie do powstania sprzeczności [...].

Jeśli chodzi o znaczenie logik wielowartościowych, to — jak się zdaje — w logice dwuwartościowej nie można zdefiniować modalności. W logice takiej nie można zdefiniować np. możliwości czy konieczności w taki sposób, aby oddać wszystkie intuicje z nimi związane. Jeśli zgodzimy się, że wszystkie przyjęte funkcje są ekstensjonalne, to logika modalna musi być wielowartościowa.

W logice dwuwartościowej brak odpowiednich funkcji ekstensjonalnych dla odróżniania możliwości od niemożliwości, przypadkowości od konieczności *etc.*

Przełożyła z francuskiego Wanda Jadacka