Filozofia Nauki
Rok IV, 1996, Nr 3(15)

Anna Lemańska

Eksperyment komputerowy w matematyce

W ciągu ostatnich trzydziestu lat matematycy zaczęli posługiwać się nowym narzędziem — komputerem. W konstrukcję komputera zaangażowanych jest kilka podstawowych teorii przyrodniczych. Konieczne jest również oprogramowanie, do powstania którego niezbędne są zarówno teorie matematyczne (np. metody numeryczne), jak i teorie dotyczące własności algorytmów, języków programowania itp.

Automatyczne dowodzenie twierdzeń, uzyskane przy pomocy komputera dowody takich twierdzeń, których dowody w tradycyjnej formie nie są znane, posługiwanie się grafiką komputerową, obserwacje zachowania się rozmaitych układów przy zmianach parametrów, rozwiązywanie równań różniczkowych, całkowanie — to tylko niektóre z możliwości zastosowania komputerów w matematyce. Wykorzystywanie komputera stworzyło nowe warunki pracy matematyka, prowokując jednocześnie do postawienia szeregu pytań dotyczących metody uprawiania matematyki. Jednym z nich jest pytanie o istotę i rolę tzw. eksperymentów komputerowych. W szerszej perspektywie problemy związane z eksperymentowaniem łączą się z jedną z zasadniczych dla filozofii matematyki kwestii, a mianowicie z pytaniem o to, czy wiedza matematyczna ma charakter aprioryczny czy aposterioryczny.

W ostatnich latach jednymi z najszybciej rozwijających się teorii matematycznych są teorie zbiorów fraktalnych i chaosu deterministycznego. Znajdują one szereg zastosowań, m.in. do opisu takich zjawisk i procesów, ktore do tej pory nie poddawały się badaniom przy pomocy matematyki.

Przykłady zbiorów, które obecnie są nazywane „fraktalnymi", były znane od dawna, a «wrażliwość» na warunki początkowe pewnych układów mechanicznych, których zachowanie opisują równania Hamiltona, zauważył już pod koniec ubiegłego wieku H. Poincaré (1892). Traktowano je jednak jako mało istotne dla rozwoju matematyki «ciekawostki», znajdujące się niejako na marginesie głównego nurtu badań.[1] Rozwiązywanie problemów, które powstają przy badaniu zbiorów fraktalnych czy układów dynamicznych nieliniowych, stało się możliwe, jak się wydaje, dzięki technice komputerowej. Szybkie przeprowadzanie obliczeń, które byłyby praktycznie niewykonalne bez posłużenia się maszyną cyfrową, stworzyło nowe warunki dla badania zbiorów fraktalnych i dynamiki chaotycznej.[2]

Przedstawię poniżej kilka przykładów wykorzystania komputera do badań matematycznych.

Rozważmy odwzorowanie $f_a(x) = ax(1 - x)$ domkniętego odcinka $[0, 1]$ w siebie, zależne od parametru a, przyjmującego wartości z przedziału $[0, 4]$. Dla dowolnego x_0, należącego do przedziału $[0, 1]$ utwórzmy ciąg $\{x_0, x_1, x_2, ..., x_n,...\}$, gdzie $x_{n+1} = f_a(x_n)$. Ciąg ten nazywamy „trajektorią punktu x_0".

W zależności od wartości parametru a mamy do czynienia z różnym jakościowo zachowaniem się trajektorii punktów x_0. To zachowanie łatwo zaobserwować na monitorze komputera. Jeżeli a należy do przedziału $[0, 1]$, to dla dowolnego x_0 z przedziału $[0, 1]$ trajektoria punktu x_0 jest zbieżna do 0. Jeżeli a należy do przedziału $(1, 3]$, to ta trajektoria jest zbieżna do punktu stałego odwzorowania f_a, który jest równy $x_s = 1 - 1/a$ (mówimy wtedy, że punkt stały przyciąga trajektorię). Istotne jakościowo zmiany w zachowaniu się trajektorii następują, gdy wartość parametru a przekracza 3. W punkcie $a = 3$ następuje bifurkacja podwojenia okresu, czyli punkt x_s przestaje przyciągać trajektorie, pojawia się natomiast okresowa orbita o okresie 2. Dla a z przedziału $(3, 1 + \sqrt{6}]$ orbita ta przyciąga trajektorie wszystkich punktów z odcinka $(0, 1)$, z wyjątkiem punktu stałego x_s. Dla $a = 1 + \sqrt{6}$ znowu następuje bifurkacja podwojenia okresu. Pojawia się okresowa orbita o okresie 4, przyciągająca trajektorie wszystkich punktów z odcinka $(0, 1)$ z wyjątkiem punktu stałego i orbity o okresie 2. Można udowodnić, że istnieje nieskończony ciąg $a_0, a_1, ...$ punktów bifurkacji. W punkcie a_k orbita o okresie 2^k traci stabilność i powstaje stabilna orbita o okresie 2^{k+1}. Ciąg $a_0, a_1, ...$ jest zbieżny do $a_b = 3{,}56995...$. Zjawisko pojawiania się kolejnych punktów bifurkacji nosi nazwę „kaskady Feigenbauma".

W obszarze parametru $a > a_b$ można zaobserwować zjawisko wrażliwości na warunki początkowe: niewielka zmiana punktu startowego x_0 może spowodować rozejście się trajektorii już po kilkunastu a nawet po kilku iteracjach. Również niewielka zmiana

[1]Przykłady funkcji ciągłych nigdzie nieróżniczkowalnych, zbiór Cantora i inne tego typu «patologiczne» obiekty w matematyce zaczęły pojawiać się wraz z ugruntowaniem podstaw analizy matematycznej. Niektóre z nich okazywały się kontrprzykładami dla intuicji, które matematycy wiązali z pewnymi pojęciami.

[2]Twórcą teorii fraktali jest B. Mandelbrot. Przykłady zbiorów fraktalnych i ich zastosowań można znaleźć w jego monografii *The Fractal Geometry of Nature* (New York 1983). Określenie „chaos" w kontekście układów dynamicznych zostało po raz pierwszy użyte przez Y. Li i J. Yorke'a w artykule «Period Three Implies Chaos» (*The American Mathematical Monthly* 82(1975), s. 985-992). Wcześniej podobnymi sprawami zajmował się A.N. Szarkowski w pracy „Coexistence of Cycles of a Continous Map of Line into Itself" (*Ukrainian Mathematical Journal* 16(1964), s. 61-71).

samego parametru a powoduje jakościowe zmiany w dynamice całego układu. Zjawisko chaosu deterministycznego[3] łatwo jest zaobserwować na ekranie komputera. Takie same własności jak odwzorowanie logistyczne posiadają również inne funkcje.

Punkty stałe odwzorowania i stabilne orbity okresowe są przykładami atraktorów, czyli takich zbiorów niezmienniczych, które przyciągają trajektorie punktów ze swego sąsiedztwa. Przykładów tzw. dziwnych atraktorów może dostarczać układ iterowanych odwzorowań zwężających. Niech X będzie przestrzenią metryczną, a $w_1, w_2, ..., w_k$ układem przekształceń zwężających przestrzeni X w siebie. Niech A będzie zwartym i niepustym podzbiorem X. Określamy $W(A) = w_1(A) \cup w_2(A) \cup ... \cup w_k(A)$ oraz ciąg $A_0, A_1, A_2, ..., A_n, ...$, gdzie $A_{n+1} = W(A_n)$. Można pokazać, że ciąg ten jest zbieżny do granicy A_ω, która nie zależy od wyboru A_0 i jest jedynym rozwiązaniem równania $W(A) = A$. Dla pewnych układów odwzorowań zwężających zbiór A_ω ma bardzo skomplikowaną strukturę, której zawiłość, a często również i piękno, można zobaczyć na ekranie komputera.[4]

Dziwne atraktory z powyższego przykładu stanowią jednocześnie przykłady tzw. zbiorów fraktalnych. Innym przykładem zbioru fraktalnego jest badany metodami numerycznymi przez B. Mandelbrota (1980) zbiór, nazwany od jego nazwiska „zbiorem Mandelbrota". Powstaje on w dosyć naturalny sposób przy badaniu zachowania się iteracji odwzorowania $F_c(z) = z^2 + c$, gdzie z i c są liczbami zespolonymi. Niech $z_0 = 0$, $z_{n+1} = F_c(z_n)$. Zbiór Mandelbrota jest zbiorem tych parametrów c, dla których ciąg $\{z_n\}$ jest ograniczony. Okazuje się, że zbiór ten ma niezwykle zawiłą strukturę, do badania której pomocny jest komputer.

Komputer zatem «produkuje» zbiory fraktalne i dziwne atraktory, pozwalając obserwować zachowanie się dynamiki chaotycznej. Dzięki temu możemy niejako naocznie dostrzec własności rozpatrywanych zbiorów,[5] a także, co jest szczególnie ważne dla rozwoju teorii matematycznych, gromadzić informacje o «zjawiskach» zachodzących w dziedzinie obiektów matematycznych, oraz znajdować nowe obszary badań. Tym samym, przy pomocy komputera matematyk dokonuje tego, co potocznie rozumie się przez eksperymentowanie. Nasuwa się zatem pytanie: Czy posługiwanie się komputerem zmieniło dotychczasową praktykę uprawiania matematyki? Coraz częściej jest głoszony pogląd, w myśl którego matematyka przerodziła się w naukę eksperymen-

---

[3] H.G. Schuster tak określa pojęcie chaosu deterministycznego: jest to 'ruch nieregularny, czyli chaotyczny, otrzymywany z układu nieliniowego, którego prawa dynamiki jednoznacznie określają ewolucję układu w czasie, gdy znana jest jego wcześniejsza historia (por. H.G. Schuster, *Chaos deterministyczny. Wprowadzenie*, Warszawa 1995, s. 15).

[4] Por.: J. Kudrewicz, *Fraktale i chaos*, Warszawa 1993, s. 20-29.

[5] B. Mandelbrot w kontekście wykorzystywania grafiki komputerowej stwierdza, że oko zasługuje na to, by je potraktować jako integralny element procesu myślenia naukowego („Opinions", *Fractals* 1(1993), s. 117-123).

talną.[6] Jak się jednak wydaje, w swej istocie sposób uprawiania matematyki pozostał niezmieniony. Na rzecz takiej tezy można przytoczyć następujące argumenty.

Rysunek zawsze w geometrii odgrywał istotną rolę. Znane są «rysunkowe» dowody twierdzeń, na przykład twierdzenia Pitagorasa. Wystarczy przyjrzeć się rysunkowi, aby «zobaczyć» prawdziwość twierdzenia. Również w innych niż geometria działach matematyki przy pomocy rozmaitych rysunków, diagramów, szkiców itp. próbuje się stworzyć obrazowe przedstawienie pewnych sytuacji lub wzbudzić określone intuicje. Ciekawym przykładem teorii posługującej się diagramami jest teoria kategorii. Podobną rolę jak rysunki odgrywają modele fizyczne. Ogromne znaczenie mają w matematyce czynniki intuicyjne. Na przykład intuicje, które wytwarzały się dzięki zastosowaniom rachunku nieskończenie małych, w szczególności w mechanice, miały istotny wpływ na kształtowanie się podstawowych pojęć analizy. Również teoria mnogości była rozwijana przez G. Cantora początkowo na podstawie intuicyjnego rozumienia zbioru. Sprawdzanie na konkretnych przykładach zachowania się wybranych obiektów matematycznych często prowadziło do wysuwania, jak się później okazywało, prawdziwych wniosków, chociaż często ich dedukcyjne dowody nie były znane. Na przykład R. Descartes — obliczając pola figur o jednakowym obwodzie — stwierdził, że koło ma z nich największą powierzchnię. Według niego takie indukcyjne potwierdzenie było wystarczające. Podobnie L. Euler sprawdzał na wielu konkretnych przykładach poprawność wzorów na sumę dzielników danej liczby naturalnej.[7] Przykłady wpływu rozmaitych doświadczeń na rozwój teorii matematycznych można by mnożyć.

Jak się zatem wydaje, naoczność rozmaitych modeli i rysunków, intuicja «wewnątrzmatematyczna», a także intuicje kształtowane pod wpływem interakcji między teoriami matematycznymi a ich zastosowaniami, zawsze były obecne w praktyce matematyków. W tym kontekście eksperymentowanie na komputerach nie różni się jakościowo od tego, co do tej pory działo się w badaniach matematycznych. Różnice są tylko ilościowe: stosując komputery, mamy znacznie większe możliwości obliczeniowe.

Dzięki współpracy z komputerem matematyk zdobywa nowe informacje o interesującej go dziedzinie. Informacje te mogą sugerować zarówno sformułowanie twierdze-

[6] W związku z istnieniem dowodów komputerowych tezę o przeradzaniu się matematyki w naukę empiryczną wysunął m.in. T. Tymoczko („The Four-Color Problem and Its Philosophical Significance", [w:] T. Tymoczko (ed.), *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, Boston-Basel-Stuttgart 1985, s. 243-266). Zwrócił on uwagę na to, że spełnianie przez komputer założonych przez konstruktorów zadań jest faktem empirycznym i może być sprawdzone jedynie przez doświadczenie. Z kolei w kontekście wykorzystywania komputerów do badania dynamiki chaotycznej o nowej matematyce eksperymentalnej pisze D.R. Hofstadter („Strange Attractors: Mathematical Patterns Delicately Poised Between Order and Chaos", *Scientific American*, 1981, no 11, s. 22-24).

[7] Przykłady te podaje G. Pólya (*Mathematics and Plausible Reasoning*, Vol. I, Princeton - New Jersey 1954, s. 90-100 i 168), który w swoich pracach zwraca uwagę na rolę doświadczenia w procesie tworzenia matematyki (por. np. *Jak to rozwiązać? Nowy aspekt metody matematycznej*, Warszawa 1964).

nia, jak i jego dowód. Wyniki komputerowe dostarczają przykładów oraz kontrprzykładów dla konkretnych twierdzeń bądź hipotez. Wszystko to wskazuje na podobieństwa między rolą eksperymentu w matematyce a rolą doświadczenia w naukach przyrodniczych. Na tym jednak podobieństwa się kończą.

Wyniki doświadczeń w naukach przyrodnicznych spełniają istotną funkcję w fazie uzasadnienia teorii przyrodniczej. Każda teoria przyrodnicza jest nieustannie konfrontowana z wynikami eksperymentów i obserwacji. Nie wystarczy logiczna niesprzeczność teorii; to wynik eksperymentu jest instancją rozstrzygającą na rzecz jej przyjęcia bądź odrzucenia. Dlatego teorie przyrodnicze są nieustannie poprawiane i mogą ulegać zmianom pod wpływem nowych danych doświadczalnych. W matematyce nic takiego nie ma miejsca.[8] Jeśli bowiem mamy poprawnie przeprowadzony dowód jakiegoś twierdzenia, to nie istnieją eksperymenty, których wyniki mogłyby być w sprzeczności z tym twierdzeniem. Jeżeli teoria matematyczna jest niesprzeczna, to nie mogą pojawić się dane niezgodne z tą teorią, zmuszające matematyka do jej odrzucenia. Sformułowanie teorii przyrodniczej w postaci aksjomatycznej i niesprzeczność takiej teorii nie zabezpieczają jej wyników przed niezgodnością z wynikami doświadczeń bądź obserwacji.

W pracach na temat zbiorów fraktalnych lub dynamiki chaotycznej wyniki eksperymentów komputerowych jedynie ilustrują dane zagadnienie. Nie stanowią natomiast uzasadnienia prawdziwości prezentowanych twierdzeń. Dedukcyjny dowód pozostaje ciągle uzasadnieniem ostatecznym. Metoda aksjomatyczno-dedukcyjna nadal jest jedyną metodą matematyki. Oczywiście wiele wyników uzyskanych przy pomocy komputera jak dotąd nie ma jeszcze dedukcyjnego dowodu i na razie musimy poprzestać na ich eksperymentalnym potwierdzeniu.[9] Nie znaczy to jednak, że są one traktowane tak samo, jak «zwykłe» twierdzenia matematyczne i że nie dąży się do znalezienia ich uzasadnienia dedukcyjnego.

Na postawione zatem na wstępie pytanie moja odpowiedź jest następująca. Wiedza matematyczna ma charakter aprioryczny w tym sensie, że do uzasadnienia prawdziwości twierdzeń matematycznych konieczny jest tylko poprawnie przeprowadzony w ramach danej teorii dowód dedukcyjny. Istnienie dowodów komputerowych nie podważa tezy, że jedyną metodą w matematyce jest metoda aksjomatyczno-dedukcyjna. Do-

---

[8] I. Lakatos wprawdzie zwracał uwagę na rolę, jaką odgrywają hipotezy w matematyce, a także kontrprzykłady, które wymuszają dokonywanie zmian w sformułowaniu twierdzenia czy w jego dowodzie, a w skrajnych wypadkach nawet jego odrzucenie. Stąd wyciągał wniosek o hipotetyczności wiedzy matematycznej i jej podobieństwie do wiedzy z zakresu nauk przyrodniczych (zob. J. Worrall, E. Zahar (eds.), *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge University Press, Cambridge 1976). Jak się jednak wydaje, spostrzeżenia Lakatosa dotyczą samego procesu tworzenia wiedzy matematycznej, a nie ukształtowanych już teorii matematycznych.

[9] Na przykład hipoteza Kaplana-Yorke'a, wysunięta w 1972 r., była sprawdzana numerycznie i uzyskała w ten sposób potwierdzenie. Nie rezygnuje się jednakże z badania zakresu jej zastosowań i poszukiwania dedukcyjnego dowodu.

wód komputerowy jest zresztą także w swej istocie dowodem dedukcyjnym. Komputer pozwala tylko na sprawne przeprowadzenie potrzebnych obliczeń lub sprawdzanie ogromnej liczby przypadków. Oczywiście poprawność takiego dowodu zależy od znacznie większej liczby czynników, niż poprawność zwykłego dowodu. Błąd w dowodzie może być bowiem spowodowany różnymi przyczynami technicznymi, usterkami w funkcjonowaniu komputera, błędami w oprogramowaniu, w algorytmie itd. Możliwość popełniania błędów przy zastosowaniu pomocniczego narzędzia nie przekreśla jednakże istoty metody, którą posługuje się matematyka.

To, że matematyka «morfologicznie» jest nauką aprioryczną, nie znaczy jednak, że «genetycznie» rzecz biorąc — w procesie powstawania — nie może ona mieć charakteru aposteriorycznego. Aprioryczność wiedzy matematycznej nie znaczy również, że wiedza ta jest pewna. Jak wiadomo, nie istnieją absolutne dowody niesprzeczności teorii matematycznych. Zawsze mogą zdarzać się pomyłki, których wyeliminowanie nie musi odbywać się szybko. Współpraca z komputerem nie zabezpiecza przed błędami; co więcej prawdopodobieństwo pojawienia się błędu jest tu znacznie większe niż wtedy, gdy nie posługujemy się maszyną cyfrową. Wiedza matematyczna pozostaje zatem niepewna. Hipotetyczność ta jest jednakże spowodowana innymi czynnikami niż hipotetyczność wiedzy przyrodniczej.

W filozofii nauki zwraca się uwagę na przenikanie się fazy odkrycia i fazy uzasadnienia, oraz na procesy tworzenia nowej wiedzy i gotowych już «produktów», którymi są teorie. Przy określaniu charakteru danej dyscypliny naukowej istotna ma być nie tylko logiczna budowa zaawansowanych już teorii, lecz również sposób dokonywania nowych odkryć i budowania teorii oraz historia całej dyscypliny. W odniesieniu do matematyki zwraca się uwagę na kulturowe uwarunkowania rozwoju matematyki, na pewne założenia natury filozoficznej, leżące u podłoża niektórych teorii itp. Jednakże w wypadku matematyki znacznie łatwiej jest, niż w wypadku innych typów nauk, oddzielić teorię, jako gotowy produkt, od procesu jej formowania, co może przemawiać dodatkowo na rzecz jej aprioryczności.