Filozofia Nauki (The Philosophy of Science)
ISSN 1230-6894 e-ISSN 2657-5868
2022, vol. 30(3) [119]: 33-50
DOI: 10.14394/filnau.2022.0027

JERZY DADACZYŃSKI*

GIUSEPPE VERONESEGO KONSTRUKTYWIZM ARYTMETYCZNY A POZNAWALNOŚĆ NIESKOŃCZONOŚCI
STUDIUM WYBRANYCH WĄTKÓW FILOZOFII MATEMATYKI WE WPROWADZENIU DO *GRUNDZÜGE DER GEOMETRIE VON MEHREREN DIMENSIONEN*

Abstract

GIUSEPPE VERONESE'S ARITHMETICAL CONSTRUCTIVISM AND THE COGNIZABILITY OF INFINITY: A STUDY OF SELECTED ASPECTS OF THE PHILOSOPHY OF MATHEMATICS IN THE INTRODUCTION TO *GRUNDZÜGE DER GEOMETRIE VON MEHREREN DIMENSIONEN*

In the first part of the article, Giuseppe Veronese's concept of arithmetical constructivism is reconstructed from his dispersed remarks. It is pointed out that although for Veronese time is a necessary condition for the construction of natural numbers by an individual subject and the subject cognizes time in an a priori way, it is not a (proto-)intuition of the subject. This is a fundamental difference between the concept proposed by Veronese and the constructivism of Kant and Brouwer. Veronese's justification of the subject's ability to cognize infinity, represented in his text by infinite sequences, is analyzed in the second part of the paper. The only condition for the cognition of the infinite sequence is to have a rule according to which its successive terms "follow one another." The price of the ability to cognize the infinitive "whole" (sequence) may be the uncognizability of certain "parts" (terms of sequence). Infinite sequences, cognizable according to Veronese, are allowed as objects of mathematical research, although they do not meet the condition of constructability.

Keywords: Giuseppe Veronese, constructivism, natural numbers, infinity, infinite sequences, cognizability

* Uniwersytet Papieski Jana Pawła II w Krakowie, Wydział Filozoficzny, Katedra Filozofii Logiki, ul. Kanonicza 9/203, 31-002 Kraków; e-mail: jerzy.dadaczynski@upjp2.edu.pl, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8175-9240.

Tytułowe dzieło[1] Giuseppe Veronesego[2] poprzedzone jest wprowadzeniem *(Einleitung)*, które zawiera również stwierdzenia natury filozoficznej[3]. Są tam między innymi istotne tezy na temat filozofii arytmetyki liczb naturalnych. Celem mojego opracowania jest przede wszystkim wydobycie z porozrzucanych w tekście tez pewnej koncepcji filozofii arytmetyki i poddanie jej analizie. Chcę też zbadać rozwiązanie Veronesego dotyczące dostępu poznawczego podmiotu do nieskończoności. Nieskończoność jest reprezentowana w *Grundzüge der Geometrie* przez nieskończone ciągi przedmiotów. Ze względu na połączenie przez Veronesego w jednym tekście koncepcji konstrukcji liczb naturalnych z poznawalnością nieskończoności swoje badania ograniczę do kwestii dostępu podmiotu do nieskończonych ciągów liczb naturalnych.

---

[1] Pełny tytuł monumentalnego dzieła Veronesego (1894) brzmi: *Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten gradliniger Einheiten in elementarer Form entwickelt. Mit Genehmigung des Verfassers nach einer neuen Bearbeitung des Originals übersetzt von Adolf Schepp.*

[2] Giuseppe Veronese urodził się w 1854 roku w Chioggi. Po ukończeniu szkoły średniej nie miał środków na podjęcie studiów. Przez rok pracował w Wiedniu. Znalazł wtedy mecenasa, który opłacił mu studia. Podjął je w 1873 roku na Politechnice Zuryskiej, gdzie uczęszczał zarówno na zajęcia politechniczne, jak i z zakresu matematyki. Następnie od 1876 roku kontynuował je w Rzymie, będąc równocześnie asystentem profesora geometrii Luigiego Cremony. Tam też obronił doktorat, a w latach 1880-1881 przebywał na stypendium na Uniwersytecie Lipskim, gdzie studiował pod kierunkiem Felixa Kleina, najwybitniejszego obok Poincarégo geometry tamtych czasów, twórcy m.in. słynnego Programu Erlangeńskiego. W czasie stypendium wygrał konkurs na stanowisko profesora geometrii algebraicznej na uniwersytecie w Padwie. Piastował je do końca życia.

Warto zwrócić uwagę na związki Veronesego z kulturą i nauką niemieckojęzyczną. Miasto rodzinne Veronesego znajdowało się w prowincji Wenecja, która w roku jego urodzin od 39 lat (czyli od Kongresu Wiedeńskiego) należała do monarchii Habsburskiej. Prowincję tę przyłączono dopiero w 1866 roku do jednoczących się Włoch. Należy zatem przyjąć, że od dzieciństwa przez lata młodzieńcze do uzyskania stanowiska profesora w 1881 roku Veronese był pod bardzo mocnym wpływem kultury, nauki i filozofii niemieckojęzycznej.

W zakresie geometrii Veronese zasłynął badaniami wielowymiarowych geometrii rzutowych oraz zbudowaniem geometrii niearchimedesowej, tzn. takiej, która nie spełnia starożytnego aksjomatu Eudoksosa–Archimedesa. Posługiwał się w niej aktualnie nieskończenie małymi. Reakcja Peana na geometrię Veronesego była zdecydowanie negatywna. Peano, który dążył do pełnej formalizacji aksjomatyzacji i ugruntowania na logice matematyki, wskazywał w pracach Veronesego liczne nieścisłości i był przekonany o wewnętrznej sprzeczności jego systemu geometrycznego. Kwestia niesprzeczności (względnej) tej geometrii została pozytywnie rozwiązana przez Hilberta w 1899 roku (Hilbert 1899). Wprowadzenie przez Veronesego do matematyki aktualnie nieskończenie małych spotkało się też ze zdecydowanym oporem Cantora, który nazywał je (matematycznymi) „zarazkami cholery". Należy też podkreślić, że Veronese brał aktywny udział w życiu politycznym, najpierw na poziomie lokalnym w północnych Włoszech, a potem na poziomie krajowym, piastując do końca życia, tzn. do 1917 roku, stanowisko senatora Królestwa Włoch.

[3] Filozofia matematyki Veronesego zawarta we wstępie (*Einleitung*) do jego książki została szczegółowo zrekonstruowana w (Dadaczyński 2013).

Zasadność podjęcia tego tematu wynika między innymi z faktu, że konstruktywizm w filozofii matematyki miewa – ujmując rzecz bardzo delikatnie – problemy z przedmiotami nieskończonymi i odpowiednią ich epistemologią. Dlatego też warto poznać rozwiązanie Veronesego i dowiedzieć się, jak przezwyciężał trudności konstruktywistyczne. Trzeba przy tym z góry zaznaczyć, że samo sformułowanie rozwiązania podanego przez Veronesego jest skomplikowane i wymaga drobiazgowej analizy. Należy też zauważyć, że chodzi wyłącznie o deklarowaną przez Veronesego koncepcję filozoficzną pewnego istotnego fragmentu matematyki bez uwzględnienia filozoficznych założeń – być może nawet niewyrażanych wprost przez Veronesego – rzeczywiście uprawianej przez niego matematyki czy też wniosków filozoficznych z niej płynących. Podjęcie tego wątku „rozsadziłoby" to i tak spore opracowanie[4]. Może ono jednak w przyszłości stanowić punkt wyjścia dla porównania obydwu wątków filozofii matematyki Veronesego.

1. VERONESEGO OGÓLNE ZAŁOŻENIA ONTOLOGII MATEMATYKI

Badania dotyczące filozofii matematyki Veronesego dobrze jest rozpocząć od jego definicji abstrakcyjnych form matematycznych. Aby ta definicja była zrozumiała, konieczne jest jednak wcześniejsze doprecyzowanie użytego w niej terminu „cecha". Veronese stwierdza:

> [MER] Cecha (*Merkmal, contragesso*) pewnej rzeczy jest tym, za pomocą czego możemy tę rzecz porównywać z innymi rzeczami. *Przykł.* Kajus jest jako człowiek równy Tytusowi, ale Kajus i Tytus mogą się różnić pod względem innych własności[5] (Veronese 1894: 4).

Posługując się takim pojęciem cechy, Veronese stara się określić, czym są abstrakcyjne formy matematyczne:

> [AFM] Przedmioty duchowe, których cechami są całość, części, porządek, rodzaj pozycji albo które dają się porównywać za pomocą tych cech,

[4] Przykładem rozdźwięku między deklarowaną filozoficzną koncepcją matematyki a tą wynikającą z praktyki naukowej jest dorobek Kroneckera. Na płaszczyźnie filozoficznej deklarował się on jako konstruktywista, wiele jego prac matematycznych nie uwzględniało jednak tej dyrektywy.

[5] „§ 9. *Def. I.* Das *Merkmal* (*contragesso*) eines Dinges ist dasjenige, mittels dessen wir es mit anderen Dingen vergleichen können. [...] *Beisp.* Cajus ist dem Titius als Mensch gleich, aber Cajus und Titius können in Bezug auf andere ihrer Merkmale verschieden sein" (Veronese 1894: 4).

> nazywają się *abstrakcyjnymi formami matematycznymi* albo *wielkościami*, nawet jeśli nie uwzględnia się niektórych z wymienionych wyżej cech[6] (Veronese 1894: 18).

Zatem według Veronesego:

1. abstrakcyjne formy matematyczne są przedmiotami duchowymi,

2. formy te należy utożsamiać z wielkościami.

Powstaje oczywiście pytanie o znaczenie użytego w AFM terminu „wielkość". Po pierwsze, ze względu na 1 i 2 wielkość jest w pewien sposób związana z matematyką. Po drugie, nie ma w tekście Veronesego żadnych, nawet matematycznych, dookreśleń wielkości (np. archimedesowa, dyskretna itp.). Po trzecie, wielkość, jak wynika z 1 i 2, jest pewnym przedmiotem. W tym kontekście nasuwa się podana przez Wolffa tworzącego słownictwo filozoficzne i matematyczne języka niemieckiego i bardzo rozpowszechniona w XVIII i XIX wieku w krajach niemieckojęzycznych definicja matematyki jako nauki o wielkościach (Wolff 1716: 864)[7]. Stąd wniosek, że dla Veronesego wielkość

---

[6] „§ 38. *Def. I.* Die geistigen Gegenstände, deren Merkmale das Ganze, die Theile, die Ordnung und die Art der Position sind oder welche sich mittels dieser Merkmale vergleichen lassen, heissen *abstracte mathematische Formen oder Grössen*, auch wenn von einigen der obengenannten Merkmale abgesehen wird" (Veronese 1894: 18).

[7] Aby podać definicję terminu „wielkość", która obowiązywała w czasach Wolffa, trzeba odwołać się aż do aksjomatyki (nie mylić z postulatami geometrycznymi) *Elementów* Euklidesa, która zgodnie ze współczesnymi koncepcjami zawiera uwikłaną definicję tego terminu. Badaniom wielkości poświęcona jest V księga *Elementów* Eudoksosa, w której zostały wprowadzone wielkości niewymierne. W czasach Wolffa zgodnie z grecką tradycją wielkości to odcinki przy ustalonej jednostce (geometria) i odpowiadające im dodatnie liczby rzeczywiste (arytmetyka). Z czasem w wyniku długiego procesu zaakceptowano też w matematyce europejskiej wielkości ujemne. Dla Veronesego, w okresie, gdy cała ówczesna matematyka (z analizą i geometrią) była zarytmetyzowana, a więc redukowalna do arytmetyki liczb naturalnych, obiektami matematyki były nadal (z jednym wyjątkiem, o którym dalej będzie mowa) liczby rzeczywiste, czyli wielkości. Było tak chociażby dlatego, że liczby naturalne, całkowite i wymierne stanowiły „wyróżnione" poddziedziny liczb rzeczywistych, a analiza i wszystkie geometrie były redukowalne do arytmetyki liczb rzeczywistych. Veronese dodał do tego przedmioty wyeliminowane przez reformę podstaw analizy z początku XIX wieku – wielkości niearchimedesowe. W tym znaczeniu można twierdzić, że Veronese podtrzymywał Wolffowską tezę, zgodnie z którą przedmioty matematyki to wielkości.

Piotr Błaszczyk (2013) słusznie zauważa, że pojęcie wielkości zostało ponownie zaksjomatyzowane w 1885 roku przez Stolza (1885: 82-83) oraz przez Höldera (1901) i nabrało w ten sposób zmienionego – w stosunku do Wolffowskiego – znaczenia. Istnieją jednak przesłanki wskazujące, że Veronese posługiwał się dawnym znaczeniem terminu „wielkość". Po pierwsze, można przypuszczać, że gdyby Veronese chciał użyć terminu „wielkość" w znaczeniu wynikającym z aksjomatyki Stolza, to ze względu na wagę tradycyjnego znaczenia (abstrakcyjna forma matematyczna) to obiekt matematyczny oraz że wszystkie obiekty matematyczne są wielkościami.

Biorąc pod uwagę te ustalenia oraz 1 i 2, można stwierdzić, że w koncepcji Veronesego:

[D] Każdy przedmiot matematyczny jest przedmiotem duchowym.

3. KONSTRUKTYWIZM ARYTMETYCZNY

Przytoczone fragmenty MER i AFM dotyczące przedmiotów matematycznych oraz wyprowadzony z nich wniosek D pozwalają stwierdzić, że w koncepcji Veronesego:

[LN] Liczby naturalne są przedmiotami[8] duchowymi.

Veronese *explicite* stwierdza, że liczba *dwa* jest konstruktem, efektem konstrukcji podmiotu (*wir construiren*):

[LNP2] Przykład. Przez powtórzenie tego samego duchowego działania konstruujemy np. liczbę dwa, potem jednak możemy tę liczbę uważać za przedmiot dany myśleniu[9] (Veronese 1894: 8).

---

tego słowa uczyniłby to *explicite*, odwołując się wprost do publikacji Stolza. Po drugie, wybitni matematycy – i do tego luminarze podstaw matematyki – publikujący po ukazaniu się w 1885 roku pracy Stolza, a niektórzy nawet po wydaniu w 1901 roku pracy Höldera, nadal jeszcze odwoływali się do znaczenia terminu „wielkość" wynikającego z *Elementów* Euklidesa. Przykładem jest sam Peano, który w swej najważniejszej pracy (Peano 1889: 16) używa wprost terminu „wielkość" na oznaczenie liczb rzeczywistych. Poświęcony im paragraf 10 zatytułowany jest wprost *Quantitatum systemata*. Veronese rzecz jasna znał tę fundamentalną pracę, z oczywistych względów tkwił również jednak we włoskiej, a nie tylko w niemieckiej, tradycji matematyki. Inny przykład to prace grupy Bourbaki (1947), w których jeszcze w latach 40. XX wieku używa się terminu „wielkość" na oznaczenie liczby rzeczywistej.

[8] Celowo nie opatruję tego zdania kwantyfikatorem ogólnym, ponieważ przedmiotowość niektórych liczb naturalnych będę omawiał w jednym z następnych przypisów.

[9] „*Beisp*. Durch die Wiederholung derselben geistigen Handlung konstruieren wir z. B. die Zahl zwei, dann aber können wir diese Zahl als ein dem Gedanken gegebenes Ding ansehen" (Veronese 1894: 8). Jest to przykład mający ilustrować zasadę: „Ein von dem Gedanken gesetztes Ding kann nachher als dem Gedanken gegeben betrachtet werden und umgekehrt" (Veronese 1894: 8). W tym wypadku „osadzeniem" przez myślenie przedmiotu jest jego konstrukcja.

Można więc uznać, że:

1. Konstrukcja liczby 2 jest wynikiem duchowego działania podmiotu indywidualnego. W całym analizowanym tekście Veronese mówi o podmiocie indywidualnym (*Ich*), ewentualnie o zbiorowisku podmiotów indywidualnych (*wir*), przy czym nie chodzi nigdy o wspólne działanie podmiotów indywidualnych, a jedynie o działanie indywidualnego podmiotu, które inny indywidualny podmiot też może samodzielnie podjąć. Nie można zatem traktować podmiotu Veronesego jako podmiotu kolektywnego. Podmiot Veronesego nie jest też podmiotem transcendentalnym (nie pozwala na to używanie terminu *Ich*) ani podmiotem absolutnym (*wir* wskazuje na wielość równorzędnych podmiotów mogących podejmować takie same działania). Chodzi tutaj o podmiot, który przynajmniej w punkcie wyjścia rozważań Veronesego istotnie przypomina podmiot kartezjański (Veronese 1894: 1).

2. Zgodnie z LN i LNP2 konstrukt – tzn. liczba 2 – jest przedmiotem duchowym.

3. Należy przyjąć, że duchowe działanie podmiotu jest w tym wypadku działaniem umysłowym. Nie wynika to wprawdzie wprost z tekstu LNP2, według jednak innego stwierdzenia Veronesego w analizowanej pracy konstrukcja kolejnego ważnego obiektu matematycznego – wielości (*Vielheit*) czy inaczej agregatu (*Aggregat*) – jest wynikiem działania umysłowego podmiotu: „pomyślenia razem" (*zusammendenken*) pewnych przedmiotów przez podmiot indywidualny (Veronese 1894: 8)[10].

4. O działaniu umysłowym, o którym mowa w LNP2, wiadomo też, że jest powtórzeniem (*Wiederholung*) działania, które już miało miejsce (zatem to poprzednie działanie też musiało być aktem umysłowym).

5. Należy zatem przyjąć, że uprzednie – takie samo, jak powtórzone – działanie podmiotu było konstrukcją liczby 1.

6. Poza tym, że jest ono aktem umysłowym podmiotu indywidualnego (5), nic więcej nie wiadomo na temat aktu konstruującego liczbę 1.

[10] „Def. I. Ja myślę razem więcej danych rzeczy, które nie są nawzajem sprzeczne i są takie, że kiedy usunę dowolną z nich, to nie wyjmę żadnej innej rzeczy. Wynik tej operacji nazywa się grupą (agregatem, wielością albo systemem) danych rzeczy" (Veronese 1894: 6).

7. Po wykonanym akcie konstrukcji liczby 2 jest ona dana (*ein dem Gedanken gegebenes Ding*) myśleniu konstruującego ją podmiotu[11].

Trzeba teraz koniecznie zwrócić uwagę na zawarte w LNP2 wyrażenie skrótowe „np." (niemieckie wyrażenie „z.B." od „zum Beispiel", czyli polskie „na przykład"). Znaczy to, że opis konstrukcji liczby 2 należy traktować jako uszczegółowienie pewnego ogólnego, niewypowiedzianego *explicite* przez Veronesego przepisu konstrukcji również innych, poza 1 i 2, liczb naturalnych. Należy sądzić, że kolejne powtórzenie aktu umysłowego, które prowadziło do skonstruowania liczby 1 (por. pkt 5), już po konstrukcji liczby 2 prowadzi do konstrukcji liczby 3 itd. Ten przepis ma charakter indukcyjny (rekurencyjny): konstrukcja liczby n+1 domaga się wcześniejszego skonstruowania liczby n. Przy czym trzeba tutaj ponownie zwrócić uwagę na termin „powtórzenie" (*Wiederholung*) zawarty w analizowanym tekście. Powtórzenie pewnej czynności, aktu, wymaga czasu upływającego chociażby od momentu zakończenia poprzedzającego aktu do zakończenia jego powtórzenia.

Uwzględniając te uwagi oraz analizę tekstu LPN2, punkty 1-7 można zapisać w następujący sposób:

1. Kolejne liczby naturalne, poczynając od 1, są konstruowane przez podmiot indywidualny.

2. Konstrukcje kolejnych liczb naturalnych są aktami umysłowymi podmiotu.

3. Skonstruowane przez podmiot liczby naturalne są przedmiotami duchowymi.

4. Każda skonstruowana przez podmiot liczba naturalna jest dana (*ein dem Gedanken gegebenes Ding*) myśleniu konstruującego ją podmiotu.

Powstaje przy tej okazji – nieodłączny dla konstruktywizmu – problem wykonania przez podmiot nieskończenie wielu konstrukcji (tutaj: wszystkich po kolei liczb naturalnych). Powtórzenie (*Wiederholung*) pewnej czynności, tu aktu konstruującego liczbę 1, wymaga – jak to już zaznaczyłem – czasu upływającego chociażby od momentu zakończenia poprzedzającego aktu do zakończe-

[11] Uproszczono tutaj stwierdzenie Veronesego, który pisał, że liczba 2 może być uważana za daną myśleniu. Faktycznie Veronese czyni dokładnie to samo, wystarczy porównać pod tym kątem analizowane dalej teksty NC2 i NC3.

nia jego powtórzenia. Podmiot indywidualny – *Ich* – czyli chociażby Veronese, który z owym podmiotem się utożsamia, właśnie ze względu na swoje ograniczenie czasowe nie jest w stanie skonstruować wszystkich liczb naturalnych.

Trzeba nadmienić, że według Veronesego w podmiocie pojawia się świadomość czasu, a dostęp poznawczy podmiotu do czasu ma charakter aprioryczny. Nigdzie nie twierdzi przy tym, że sam czas jest jakimś *a priori* podmiotu w sensie apriorycznej formy naoczności czy też subiektywnej (pra-)intuicji podmiotu. Czas jest jednak warunkiem koniecznym konstrukcji kolejnych liczb naturalnych.

4. DOSTĘP POZNAWCZY DO LICZB NATURALNYCH

Z wcześniejszych analiz LN wiadomo, że liczby naturalne są przedmiotami duchowymi. Ustaliliśmy również, że są one konstruktami myśli podmiotu. Z LNP2 wynika też, że po konstrukcji są one dane [*ein gegebenes Ding*] konstruującemu podmiotowi. Stwierdzenie „potem jednak” [*dann aber*], tzn. po akcie konstruującym, w niczym nieograniczające, zwłaszcza czasowo, sposobu tego „dania” podmiotowi jego konstruktu, wskazuje, że po akcie konstrukcji liczby naturalne są dane podmiotowi konstruktorowi raz na zawsze, a dokładniej: do końca istnienia podmiotu. Nie musi on zatem powtarzać ich konstrukcji, gdy chce się z nimi w taki czy inny sposób ponownie zapoznać. To wyklucza tzw. mentalizm skrajny, który domaga się w takich wypadkach każdorazowej ponownej konstrukcji obiektu przez podmiot.

Termin „dany” [*gegeben*] oznacza, że sfera umysłowa podmiotu, który dokonał konstrukcji liczby naturalnej, ma stały dostęp poznawczy do swego konstruktu. Trzeba też podkreślić, że Veronese ani nie wskazuje, ani nawet nie sugeruje innej możliwości uzyskania przez podmiot dostępu do liczby naturalnej, jak tylko już opisaną jej konstrukcję. Dlatego w dalszych badaniach będę przyjmować, że w koncepcji Veronesego:

[DP1] Podmiot *P* ma w momencie *t* dostęp poznawczy do tych i tylko tych liczb naturalnych, które *P* do *t* skonstruował.

Znaczy to też, że:

[DP2] Dla *P* poznawalne są te i tylko te liczby naturalne, które są przez niego konstruowalne. Natomiast konstruowalność – a więc i poznawalność – liczb naturalnych przez *P* jest ograniczona czasem jego istnienia.

5. POZNAWALNOŚĆ NIESKOŃCZONOŚCI

Veronese w rozproszonych wypowiedziach składających się na jego koncepcję konstruktywizmu arytmetycznego podejmuje trudną zazwyczaj dla konstruktywistów kwestię nieskończoności, a w zasadzie poznawalności nieskończoności. Nieskończoność jest reprezentowana u niego przez dowolny nieskończony ciąg przedmiotów. Veronese stara się uzasadnić, że możliwy jest dostęp poznawczy podmiotu indywidualnego do tego nieskończonego ciągu.

Widać to w tekście NC będącym częścią wprowadzenia (*Einleitung*). Na potrzeby analizy podzielmy go na cztery fragmenty:

[NC1] Ponadto możemy abstrahować od związków myślenia z poznawalnymi przedmiotami.

[NC2] W ten sposób stanie się możliwe rozważanie (badanie) nieograniczonego [*unbegrenzten*] ciągu przedmiotów i na mocy zasady §18[12] [rozważanie] danego [*gegebenen*] nieograniczonego ciągu, chociaż jest on nierealizowalny dla możliwości indywiduum.

[NC3] Wyobraźmy sobie, że została zakończona operacja, przez którą zostało osadzonych jeden po drugim wiele przedmiotów aż do przedmiotu *B* i pierwszy przedmiot został osadzony w momencie *A*. Można wtedy też powiedzieć, że wiąże się tak otrzymany ciąg przedmiotów, który postrzega się jako dany myśleniu (§18)[13], z momentem *A*, to znaczy pomija się czas, który upłynął od *A* do *B*.

[NC4] To wyjaśnia często używane wyrażenia: „kontynuować bez ograniczenia", „w nieskończoność" lub „bez końca" (Veronese 1894: 14)[14].

---

[12] Por. zasada podana w przypisie 9.

[13] Por. zasada podana w przypisie 9.

[14] „Wir können überdies von den Beziehungen des Gedankens zu den wahrnehmbaren Dingen abstrahieren. Auf diese Art wird die Betrachtung einer unbegrenzten Reihe von Dingen ermöglicht und mittels des Princips §18. diejenige einer gegebenen unbegrenzten Reihe, auch wenn sie für die Verhältnisse eines Individuums nicht realisierbar ist. Denkt man sich, die Operation, durch welche mehrere Gegenstände einer nach dem andern bis zu einem Gegenstand *B* gesetzt werden, sei vollendet und der erste Gegenstand in dem Moment *A* gesetzt, so kann man auch sagen, man beziehe die so erhaltene Reihe von *Dingen*, die man als dem Gedanken gegeben ansieht (§18.), auf dem Moment *A*, d. h. von der von *A* bis *B* verflossenen Zeit absehen. So erklären sich die oft gebrauchten Ausdrücke: *unbegrenzt, ins Unendliche oder ohne Ende* fortfahren" (Veronese 1894: 14).

Tekst Veronesego nie jest łatwy do zrozumienia. W przeważającej części jest napisany w formie bezosobowej (dwukrotne wystąpienie zaimka *man*) oraz przy użyciu strony biernej. Z kontekstu całej pracy Veronesego wynika jednak, że cały czas chodzi w nim o poznający, działający (np. konstruujący liczby naturalne) podmiot indywidualny. Aby dochować wierności tekstowi, co wyraża się i w tym, że w nawiasach podaję często odpowiednie niemieckie wyrażenia, analizę przeprowadzam też częściowo w formie oryginalnej (forma bezosobowa, strona bierna), częściowo natomiast mówię o podmiocie poznającym, działającym. W każdy razie cały czas chodzi w przedstawianej tu analizie o podmiot indywidualny, a *Gedanken*, o których mowa, są myślami tego podmiotu i są w analizie z nim faktycznie utożsamiane.

Zadanie wyjaśnienia tekstu zostanie zrealizowane w kilku etapach (A-C), a na końcu w części D zostaną przedstawione wnioski. Od razu należy zaznaczyć, że w pierwszych dwóch etapach (A, B) zgodnie z literą tekstu, analizuję wstępnie kwestię możliwości dostępu poznawczego (podmiotu indywidualnego) do ciągów przedmiotów. W kolejnym etapie (C) badam problem dostępu poznawczego podmiotu do ciągów liczb naturalnych. To bowiem jest istotne z punktu widzenia tematyki pracy dotyczącej związku konstruktywizmu arytmetycznego Veronesego z kwestią poznawalności nieskończoności, a także pozwala rozwiązać wskazany w części A problem poznania nieskończonych różnowartościowych ciągów liczb naturalnych.

A

1. Veronese stwierdza w NC1, że abstrahowanie od związków (*Beziehungen*) myślenia z poznawalnymi[15] przedmiotami (*wahrnehmbare Dinge*, por. NC2) umożliwia badanie (rozważanie, *Betrachtung*) dowolnego (*einer* – rodzajnik nieokreślony) nieograniczonego ciągu przedmiotów (*einer unbegrenzten Reihe von Dingen*), a nawet dowolnego danego (*gegebene*) nieograniczonego ciągu przedmiotów.

2. Należy wyjaśnić, że wyrażenie „nieograniczony ciąg” występuje w NC w kontekście wyrażeń z NC4: „kontynuować bez ograniczenia”, „(kontynuować) w nieskończoność” oraz „(kontynuować) bez końca”.

---

[15] Fundamentalny niemiecko-niemiecki słownik *Duden* (https://www.duden.de/, dostęp: 28.06.2019) stwierdza, że wyrażenia *erkennbar* i *wahrnehmbar* są synonimiczne, dlatego przekłada się tutaj *wahrnehmbar* na „poznawalny”.

3. Zatem w tekście NC chodzi w istocie o dowolny nieskończony ciąg przedmiotów. Dalej dowolny nieskończony ciąg przedmiotów będzie oznaczany NCP.

4. Celem NC jest uzasadnienie dostępu poznawczego podmiotu indywidualnego do NCP.

5. Tekst NC3 wyjaśnia, jak taki dostęp podmiotu indywidualnego do NCP ma być umożliwiony (*ermöglicht*).

6. W NC3 jest opisana operacja (*Operation*) wykonywana przez podmiot indywidualny.

7. Podmiot ma w momencie rozpoczęcia operacji – jak należy przyjąć – do dyspozycji wiele przedmiotów (*mehrere Dinge*). Wynika to stąd, że podmiot będzie „osadzał” owe przedmioty (*mehrere Dinge*) jako wyrazy ciągu. Należy przyjąć, że podmiot dysponuje wszystkimi przedmiotami, które zostaną osadzone.

8. Najpierw zostaje osadzony ((*wird*) *gesetzt*) przez podmiot w momencie *A* przedmiot *a* jako pierwszy wyraz ciągu itd., aż w końcu osadza się w momencie *B* przedmiot *b* jako ostatni wyraz ciągu.

9. W tym miejscu konieczna jest bardzo ważna uwaga: ciąg, o którym *expressis verbis* mowa w NC3, jest ciągiem skończonym, ma bowiem wyraz ostatni. A zatem ciąg ten nie jest NCP[16].

10. Operacja (*Operation*), o której mowa w tekście, prowadzi do „otrzymania” ciągu (*so erhaltene Reihe*).

11. Otrzymany ciąg uważa się za dany myśleniu (*die man als dem Gedanken gegeben ansieht*).

[16] Przyjmuje się tutaj, że Veronese nie rozpatruje ciągów pozaskończonych. Te mogą mieć wyraz ostatni. Rodzą się też pytania dotyczące poznawalności skończonych ciągów liczbowych zbyt długich, aby podmiot mógł osadzić ich wszystkie wyrazy, i dotyczące skończonego zasobu liczb skonstruowanych przez podmiot, które mogłyby być wyrazami tych ciągów. Są one tutaj pomijane, a odpowiednie odpowiedzi przyniesie analiza poznawalności nieskończonych ciągów liczbowych.

12. Dalej „wiąże się” (*man beziehe*) tak otrzymany ciąg z pierwotnym momentem *A*, to znaczy, pomija się czas, który upłynął między momentem *A* i momentem *B* (*d. h. von der von A bis B verflossenen Zeit absehen*).

13. Wniosek jest następujący: aby mieć dostęp poznawczy do takiego ciągu, nie trzeba osadzać po kolei wszystkich jego wyrazów. Potrzeba i wystarcza: a) mieć do dyspozycji w chwili *A′* „wiele przedmiotów” (*mehrere Dinge*), należy przyjąć, że chodzi o wszystkie wyrazy ciągu; b) „osadzić” w chwili *A′* pierwszy jego wyraz i c) w tym samym momencie mieć – jak należy przyjąć – do dyspozycji „regułę” kolejnych osadzeń wszystkich pozostałych wyrazów ciągu.

14. Ponieważ celem tekstu NC jest uzasadnienie dostępu poznawczego podmiotu indywidualnego do NCP, to należy przyjąć, że na NC3 ma być oparta pewna domyślna, niewyrażona *explicite*, analogia, która wskaże na ten dostęp do NCP.

15. Otóż przez analogię do sposobu postępowania z ciągiem skończonym w NP3: a) podmiot ma do dyspozycji w momencie *A″* wiele przedmiotów (*mehrere Dinge*), to znaczy wszystkie wyrazy NCP; b) „wiąże się” (*man beziehe*) NCP z momentem *A″*, w którym „osadza się” pierwszy wyraz tego ciągu; c) podmiot ma do dyspozycji w *A″* „regułę” osadzania pozostałych wyrazów ciągu.

16. Trzeba od razu zaznaczyć, że spełnienie warunku a) może być nierealizowalne dla podmiotu indywidualnego. Przyjmując bowiem, że i) obowiązuje DP1, a zatem również ii) DP2, a także iii) warunkiem koniecznym posiadania do dyspozycji przedmiotu przez podmiot jest dostęp poznawczy do tego przedmiotu, a zatem również iv) [DYSPKON] warunkiem koniecznym posiadania do dyspozycji przedmiotu jest poznawalność przedmiotu przez podmiot, należy stwierdzić, że podmiot nie ma i nie może mieć do dyspozycji wszystkich wyrazów nieskończonego różnowartościowego ciągu liczb naturalnych. Ze względu bowiem na ograniczoność czasową *P* większość tych liczb nie jest dla niego liczbami konstruowalnymi, a więc na podstawie DP2 nie jest też dla niego liczbami poznawalnymi[17]. Ten istotny problem [PROB] jest w tym

---

[17] W tym miejscu warto zastanowić się, czy liczby niekonstruowalne, a więc na podstawie DP2 również liczby niepoznawalne, są w koncepcji Veronesego w ogóle przedmiotami (mowa jest o niekonstruowalności i niepoznawalności zrelatywizowanych do podmiotu). Veronese pisze bowiem o warunkach poznania nieskończonych ciągów przedmiotów. Poja-

miejscu jedynie sygnalizowany, próba jego dokładnego przedstawienia i rozwiązania zostanie przedstawiona dalej. Na obecnym etapie badań problem zostaje pominięty.

17. Wracając do analogii z pkt. 15, trzeba stwierdzić, że dotąd polegała ona na tym, że związano NCP, tak jak ciąg skończony, z momentem osadzenia pierwszego wyrazu bez konieczności osadzania pozostałych wyrazów, co w przypadku podmiotu indywidualnego dysponującego skończonym czasem byłoby niewykonalne.

18. Stosując dalej analogię, trzeba stwierdzić, że w momencie *A″* uważa się NCP „za dany myśleniu" (*die man als dem Gedanken gegeben ansieht*). Jest to *explicite* potwierdzone w zdaniu NC2, gdzie mowa jest o umożliwieniu badania NCP, a nawet i „danego" (myśleniu) NCP. Analizowany tekst NC3 jest natomiast wyjaśnieniem stwierdzenia zawartego w NC2.

19. Nie można twierdzić o NCP, że został on w ten sposób „otrzymany" (*erhaltene Reihe*) przez podmiot indywidualny. Otrzymanie ciągu skończonego następowało na drodze operacji osadzania kolejnych wyrazów, której podmiot w przypadku NCP nie jest w stanie ze względów czasowych wykonać. Jest to zdecydowanie potwierdzone w tekście stwierdzeniem, że NCP jest dla podmiotu indywidualnego nierealizowalny.

---

wia się więc pytanie, czy można zaliczyć nieskończone różnowartościowe ciągi liczb naturalnych do ciągów przedmiotów, które rozważa Veronese.

Po pierwsze Veronese nie charakteryzuje w żaden sposób znaczenia terminu „przedmiot". Natomiast w LNP2 pisze, że po konstrukcji liczba (w tym wypadku liczba 2) jest przedmiotem danym myśleniu. Można się zatem domyślać, że akceptuje on w swej filozoficznej koncepcji również przedmioty, które myśleniu dane nie są, czyli także te, które myśleniu, tzn. podmiotowi indywidualnemu, nigdy dane nie będą czy wręcz nie mogą mu być dane. Zatem można przyjąć, że liczby niepoznawalne, a więc na mocy DP2 liczby niekonstruowalne, są dla Veronesego przedmiotami.

Po drugie, uwaga ta znajduje potwierdzenie w NC1. Veronese wprowadza tam pojęcie przedmiotów poznawalnych. To z kolei wskazuje, że dopuszcza w swej koncepcji również przedmioty niepoznawalne. Zatem można przyjąć, że niepoznawalne, a więc i niekonstruowalne na mocy DP2 liczby naturalne są dla Veronesego przedmiotami. Po trzecie Veronese nigdzie *explicite* nie odmawia przedmiotowości liczbom naturalnym przez podmiot nieskonstruowanym czy też przez niego niekonstruowalnym.

Na tej podstawie traktuje się tutaj nieskończone różnowartościowe ciągi liczb naturalnych jako nieskończone ciągi przedmiotów.

B

Kwestia dostępu poznawczego podmiotu do NCP nie została jeszcze w ten sposób całkowicie wyjaśniona. Pozostaje problem PROB, który został zasygnalizowany w pkt. 16. Przy próbie jego rozwiązania warto powrócić do stwierdzenia Veronesego z pkt. 1 i doprecyzowanego w pkt. 2 i 3 z części A:

1. [NC1] abstrahowanie od związków (*Beziehungen*) myślenia z poznawalnymi przedmiotami (*wahrnehmbare Dinge*) [NC2] umożliwia badanie (rozważanie, *Betrachtung*) dowolnego NCP (*einer unbegrenzten Reihe von Dingen*), a zatem i badanie (rozważanie) danego (*gegebene*) myśleniu NCP.

2. Trzeba stwierdzić, że dotychczas wyjaśniając dostęp poznawczy podmiotu indywidualnego do NCP, odwołano się jedynie do abstrahowania (*absehen*) od czasu, który byłby potrzebny do „otrzymania" (*erhalten*) ciągu skończonego oraz – przez analogię – do uzyskania (jedynie) dostępu poznawczego podmiotu do NCP.

3. To pozwala sądzić, że właśnie na drodze odwołania się do pkt. 1 możliwe będzie rozwiązanie PROB.

C

Niech dalsze rozważania dotyczą wyłącznie nieskończonych różnowartościowych ciągów liczb naturalnych [NRCLN], skoro po pierwsze te właśnie ciągi pozwoliły zwrócić uwagę na PROB, a po drugie podejmuje się tu kwestię dostępu podmiotu do nieskończoności w kontekście filozoficznej koncepcji arytmetyki liczb naturalnych Veronesego. Trzeba przypomnieć, że PROB wynika stąd, że nie wszystkie wyrazy NRCLN są przez podmiot indywidualny poznawalne. Zatem na podstawie DYSPKON nigdy nie może on ich wszystkich „mieć do dyspozycji". Stąd zaś wynika, że nie jest spełniony konieczny warunek dostępu poznawczego podmiotu do NRCLN.

Dalej przyjmuje się, że analiza jest prowadzona dla ustalonego podmiotu indywidualnego *P*. Niech

(i) $x\mathrm{W}P$

oznacza relację poznawalności *między* przedmiotem *x* oraz *P*. Ustala się, że

(ii) W^{-1}

jest konwersem relacji W, a zatem zachodzi:

(iii) $PW^{-1}x \equiv xWP$.

W^{-1} jest relacją zachodzącą między podmiotem *P* a przedmiotem *x*. Z (iii) wynika, że warunkiem koniecznym i wystarczającym jej zachodzenia jest poznawalność *x* przez *P*. Stanowi to podstawę do utożsamienia relacji W^{-1} ze związkami BZ (*Beziehunngen*) między *P* a przedmiotami poznawalnymi, o których mowa jest w NC1. BZ traktuje się tutaj jako sumę (mnogościową) relacji między *P* a przedmiotami poznawalnymi. Jako taka BZ sama jest relacją. Zatem:

(iv) $PW^{-1}x \equiv PBZx$.

Ze względu na (iii) i (iv) zachodzi:

(v) $PBZx \equiv xWP$.

Trzeba w tym miejscu przypomnieć warunek konieczny posiadania do dyspozycji przez *P* przedmiotu *x*

(vi) [DYSPKON] *P* ma do dyspozycji $x \rightarrow xWP$

Na podstawie (v) ten warunek konieczny można równoważnie podać w następującej postaci:

(vii) *P* ma do dyspozycji $x \rightarrow PBZx$

Skoro Veronese twierdzi w NC1, że warunkiem wyjaśnienia dostępu poznawczego *P* do NCP, a więc i do NRCLN, jest abstrahowanie od relacji BZ (nieuwzględnienie jej), znaczy to, że warunkiem koniecznym wyjaśnienia tego dostępu jest nieuwzględnienie relacji BZ również w prawie (vii), a więc i nieuwzględnienie samego prawa (vii). To zaś ze względu na równoważność (vii) i (vi) prowadzi do stwierdzenia, że według Veronesego warunkiem koniecznym wyjaśnienia dostępu poznawczego *P* do NRCLN jest nieuwzględnienie prawa DYSPKON. Innymi słowy, aby uzasadnić dostęp poznawczy podmiotu *P* do NRCLN należy nie uwzględniać poznawalności przez *P* liczb naturalnych, z których „składa się” NRCLN. Nieuwzględnienie DYSPKON pozwala, by *P* miał do dyspozycji wszystkie liczby, z których „składa się” NRCLN, mimo że większość z nich jest przez niego niekonstruowalna, a więc i niepoznawalna. W ten sposób spełniony jest warunek a) z pkt. 15 części A, a zatem podmiot według Veronesego otrzymuje dostęp poznawczy do NRCLN.

D

Podsumowując analizę tekstu Veronesego, należy podkreślić, że aby *P* uzyskał dostęp poznawczy do NRCLN, potrzeba zasadniczo, aby:

1. *P* miał do dyspozycji w chwili *t* wszystkie liczby naturalne, które będą wyrazami tego ciągu;

2. *P* krok po kroku wykonał operację osadzania wszystkich wyrazów tego ciągu, poczynając od pierwszego wyrazu w momencie *t*.

Pierwszy warunek jest niespełnialny ze względu na zasadę DYSPKON. Dlatego Veronese ją zawiesza (abstrakcja w NC1).

Drugi warunek również jest niespełnialny ze względu na ograniczenie czasowe *P*. Dlatego Veronese stwierdza, że czasu osadzania wyrazów i w konsekwencji samego osadzania wyrazów ciągu należy nie uwzględniać (*absehen* w NC3) jako warunku uzyskania dostępu do ciągów nieskończonych. W miejsce tego warunku wprowadza wymóg osadzenia pierwszego wyrazu ciągu w chwili *t* oraz *implicite* wymóg posiadania przez *P* w *t* przepisu na osadzenie wszystkich następnych wyrazów ciągu.

Należy też zauważyć, że spełnienie warunków 1 i 2 oznaczałoby w istocie skonstruowanie przez *P* NRCLN. Posiadanie do dyspozycji w chwili *t* przez *P* wszystkich wyrazów, z których składa się NRCLN, oznaczałoby – w ścisłym kontekście konstruktywizmu arytmetycznego Veronesego – wykonanie przez *P* do chwili *t* konstrukcji wszystkich potrzebnych liczb naturalnych. Natomiast operacja osadzania byłaby konstrukcją ciągu ze skonstruowanych już liczb naturalnych.

Niespełnienie obydwu warunków 1 i 2 powoduje, że w koncepcji Veronesego – wyrażonej w NC – przedmiotem badań matematycznych podmiotu *P* staje się przedmiot przez *P* nieskonstruowany i dla niego niekonstruowalny. Veronese nie ukrywa tego faktu, podkreślając, że m.in. NRCLN jest dla *P* nierealizowalny.

Konkludując zatem, należy stwierdzić, że również w analizowanym tekście Veronesego ujawnia się typowy dla konstruktywizmu problem nieskończoności. Przy założeniach przyjętych przez Veronesego jest ona niekonstruowalna.

Niemniej Veronese nie chce pozostać na gruncie finityzmu, przekracza go, lecz ceną jest zawieszenie jego konstruktywistycznych założeń.

Innym problemem, już typowo epistemologicznym, jest fakt, że NRCLN jest poznawalny, choć (nieskończenie) wiele wyrazów, z których się on składa, jest dla podmiotu indywidualnego niepoznawalne.

Wydaje się, że w przedstawiony sposób Veronese z konieczności zaakceptował to, co można by nazwać „praktyką matematyka" niezaangażowanego w żaden sposób w kwestie filozofii matematyki. Taki matematyk, mając w chwili *t* ogólny wyraz ciągu nieskończonego $a_n = 2n$, przyjmuje – i to wyłącznie *implicite*, ponieważ nie zastanawia się nad tym – że ma do dyspozycji w *t* wszystkie liczby parzyste, czyli wszystkie wyrazy ciągu. Nie zaprząta sobie głowy osadzaniem kolejnych wyrazów ciągu, czyli jego konstrukcją. Po prostu zaczyna badać jego własności, odwołując się do jego wyrazu ogólnego, poznawać go w ten sposób. Kwestia filozoficznych warunków poznawalności tego ciągu w ogóle go nie zajmuje, leży poza sferą jego zainteresowań, a być może nawet poza sferą jego świadomości.

ZAKOŃCZENIE

W opracowaniu z rozproszonych uwag Veronesego została zrekonstruowana koncepcja konstruktywizmu arytmetycznego. Zwrócono uwagę, że chociaż czas jest warunkiem koniecznym konstrukcji przez podmiot indywidualny kolejnych liczb naturalnych i podmiot poznaje czas na drodze apriorycznej, to jednak nie jest on aprioryczną formą naoczności czy też praintuicją podmiotu. To zasadnicza różnica między koncepcją Veronesego a koncepcjami Kanta i Brouwera. Konstruktywizm arytmetyczny był podstawą, do której odwołano się, analizując uzasadnienie Veronesego dotyczące możliwości poznania przez podmiot nieskończoności reprezentowanej w jego tekście przez ciągi nieskończone. Faktycznie jedynym warunkiem poznawalności ciągu nieskończonego jest dysponowanie regułą, według której kolejne jego wyrazy następują po sobie. Ceną poznawalności nieskończonej „całości" (ciągu) może być niepoznawalność niektórych „części" (wyrazów ciągu). Poznawalne według Veronesego ciągi nieskończone zostają dopuszczone jako przedmioty badań matematycznych, choć nie spełniają warunku konstruowalności.

BIBLIOGRAFIA

Błaszczyk P. (2013), *Nota o rozprawie Otto Höldera „Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass"*, „Annales Universitatis Paedagogiae Cracoviensis Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia" 141(5), 129-142.

Bourbaki N. (1947), *Théorie de la mesure et de l'intégration. Introduction*, Nancy: Université Henri Poincaré.

Dadaczyński J. (2013), *Giuseppe Veronesego podstawy matematyki*, „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce" 53, 53-92.

Hilbert D. (1899), *Die Grundlagen der Geometrie*, Leipzig: Teubner.

Hölder O. (1901), *Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass*, „Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-Physische Classe" 53, 1-63.

Peano G. (1889), *Arithmetices Principia. Nova methodo exposita*, Roma: Fratres Bocca.

Stolz O. (1885), *Vorlesungen über Allgemeine Arithmetik*, Leipzig: Teubner.

Veronese G. (1894), *Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten gradliniger Einheiten in elementarer Form entwickelt. Mit Genehmigung des Verfassers nach einer neuen Bearbeitung des Originals übersetzt von Adolf Schepp*, Leipzig: Teubner.

Wolff Ch. (1716), *Mathematisches Lexicon*, Leipzig: Gleditsch.